ПРИМЕНЕНИЕ ФРАКТАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ ДЛЯ ОЦЕНКИ ЗАГРЯЗНЕНИЯ ГРУНТОВЫХ ВОД

Д.А. Бощенко, *студент*
Научный руководитель: *Т.П. Машихина, канд. пед. наук, доцент*
Волгоградский государственный университет
(Россия, г. Волгоград)

DOI:10.24412/2500-1000-2026-5-2-130-134

Аннотация. *В статье рассматривается применение аппарата фрактальной геометрии для моделирования процессов миграции загрязнителей в грунтовых водах, фильтрующихся через пористые среды со сложной микроструктурой. Показано, что классические модели массопереноса, основанные на законе Дарси и уравнении конвекции-диффузии, непригодны для сред с фрактальной размерностью порового пространства, отличной от топологической размерности. Предложена модификация уравнения геомиграции с использованием дробной производной по времени для учёта эффекта памяти фрактальной среды. Получены аналитические решения для одномерного случая, установлена связь между аномальной дисперсией загрязнителя и фрактальной размерностью. Введён критерий локализации загрязнения, позволяющий оценить риск распространения токсикантов на большие расстояния. Результаты могут быть использованы для прогнозирования загрязнения подземных вод, оценки эффективности природной защиты водоносных горизонтов и проектирования систем экологического мониторинга.*

Ключевые слова: *фрактальная геометрия; грунтовые воды; миграция загрязнений; дробная производная; пористая среда; фрактальная размерность; аномальная диффузия; критерий локализации; массоперенос.*

Классические модели Дарси и конвекции-диффузии хорошо работают для однородных сред, но природные грунты имеют самоподобную структуру пор (от нано- до сантиметров). Из-за этого распространение загрязнителя не подчиняется закону Фика, а коэффициент дисперсии зависит от масштаба [1]. В последние десятилетия фрактальная геометрия, предложенная Б. Мандельбротом [2], стала мощным инструментом описания таких сред. В отличие от евклидовых объектов, фракталы характеризуются дробной размерностью Хаусдорфа, что позволяет количественно оценить степень «изрезанности» и разветвлённости порового пространства.

Традиционно процесс переноса растворённого загрязнителя в грунтовых водах описывается уравнением конвекции-диффузии. В одномерном приближении для консервативного (не подверженного сорбции и деградации) загрязнителя оно имеет вид:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - v\frac{\partial C}{\partial x}$$

где $C(x,t)$ – концентрация загрязнителя, D – коэффициент гидродинамической дисперсии, v– скорость поровой фильтрации. Данное уравнение основано на двух ключевых допущениях: однородность пористой среды и локальность переноса, то есть поток вещества в точке x зависит только от локального градиента концентрации. Однако в естественных условиях и то, и другое допущение часто нарушается [1, 3].

Экспериментальные исследования на естественных песчаных и глинистых грунтах показывают, что фронт распространения загрязнителя расплывается существенно медленнее, чем предсказывает классическая модель, а дисперсия концентрации растёт с расстоянием не линейно, как в модели Фика, а по степенному закону $\sigma^2 \sim t^{\alpha}$ с показателем $\alpha \neq 1$ [4]. Эти эффекты указывают на аномальную диффузию – пространственно-временную нелокальность переноса, обусловленную фрактальной природой среды [5].

Переход к фрактальному описанию пористой среды начинается с отказа от понятия «средний размер пор». В среде с фрактальной размерностью D_f распределение пор по размерам подчиняется степенному закону [2, 6]:

$$N(r > R) \sim R^{-D_f}$$

где N – число пор с радиусом, превышающим R. Для трёхмерного пространства характерна область $2 < D_f < 3$.

Другим важным параметром выступает фрактальная размерность траектории движения частицы загрязнителя d_w. Для классической броуновской диффузии в евклидовом пространстве $d_w = 2$, но в фрактальной среде из-за наличия препятствий и извилистых каналов частица движется по более сложной траектории, и $d_w > 2$. Эффективное среднеквадратичное смещение частицы загрязнителя со временем описывается соотношением [8]:

$$\langle R^2(t) \rangle \sim t^{2/d_w}$$

где показатель $2/d_w < 1$ соответствует субдиффузии – замедленному распространению вещества по сравнению с классическим случаем. Именно фрактальная структура пористой среды – наличие «тупиковых» пор и иерархических каналов – служит физической причиной удерживания частиц загрязнителя на длительное время [3, 9].

Для учёта нелокального эффекта памяти в среде с фрактальной геометрией заменим обычную производную по времени в уравнении конвекции-диффузии на дробную производную Капуто порядка γ, где $0 < \gamma < 1$ [5]. Для одномерного случая, когда конвективным переносом можно пренебречь, уравнение принимает вид:

$$\frac{\partial^\gamma C}{\partial t^\gamma} = D_\gamma \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}, \quad 0 < \gamma < 1$$

где D_γ – обобщённый коэффициент дисперсии, размерность которого $[D_\gamma] = \text{м}^2/\text{с}^\gamma$. Дробная производная Капуто порядка \gamma определяется как [8]:

$$\frac{\partial^\gamma C(x,t)}{\partial t^\gamma} = \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \int_0^t (t-\tau)^{-\gamma} \frac{\partial C(x,\tau)}{\partial \tau} d\tau$$

Физический смысл такого обобщения заключается в том, что скорость изменения концентрации в момент времени t зависит от всей предыстории процесса, что соответствует «эффекту памяти» фрактальной среды (интеграл свёртки с весом $(t-\tau)^{-\gamma}$ «взвешивает» более ранние состояния системы). Порядок производной связан с фрактальной размерностью траектории частицы: $\gamma = 2/d_w$. Для классической диффузии $d_w = 2 (\gamma = 1)$, во фрактальной среде $d_w > 2$, поэтому γ < 1 – это субдиффузия [3, 9].

В более общем случае, когда присутствует и конвективный перенос, уравнение записывается в форме [1]:

$$\frac{\partial^\gamma C}{\partial t^\gamma} = D_\gamma \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - v_\gamma \frac{\partial C}{\partial x}$$

где v_γ – обобщённая скорость конвективного переноса. Дробный порядок производной одинаков для обоих слагаемых, что отражает единую фрактальную природу процессов фильтрации и дисперсии.

Рассмотрим одномерную задачу на полубесконечной области $x \geq 0$ с начальным условием $C(x,0) = 0$ и граничным условием $C(0,t) = C_0 = \text{const}$, моделирующую поступление загрязнителя с постоянной концентрацией на входе в расчётную область (например, точечный источник). Применяя преобразование Лапласа по времени и учитывая свойства дробной производной, получаем решение в виде [5, 8]:

$$C(x,t) = C_0\left[1 - \Phi_\gamma\left(\frac{x}{2\sqrt{D_\gamma t^\gamma}}\right)\right]$$

где $\Phi_\gamma(z)$ – обобщённая функция, сводящаяся к интегралу ошибок при $\gamma = 1$. Для $\gamma < 1$ решение демонстрирует более медленное расплывание фронта концентрации по сравнению с классическим случаем: крутой начальный градиент сохраняется на протяжении большего времени. Это означает, что загрязнитель «захватывается» в микропорах и выделяется обратно в поток медленно, растягивая процесс очистки [4].

Положение фронта распространения загрязнителя в дробно-диффузионной модели подчиняется асимптотическому закону [3]:

$$x_f(t) \sim \left(D_\gamma t^\gamma\right)^{1/2}$$

При $\gamma = 1$ получаем классический закон $x_f \sim \sqrt{t}$. При $\gamma < 1$ масштаб распространения уменьшается при прочих равных условиях. Таким образом, фрактальная среда препятствует дальнему переносу загрязнителя – это так называемый эффект самоочищения, обусловленный самой структурой пористой среды. Соответственно, классическая модель $(\gamma = 1)$ даёт верхнюю, пессимистическую оценку зоны загрязнения, а фрактальная – более реалистичную, основанную на учёте внутренней неоднородности среды [6].

На основе полученных соотношений может быть введён безразмерный критерий локализации загрязнения L_f, позволяющий оценить, будет ли загрязнение распространяться на значительные расстояния или останется локализованным вблизи источника [4, 7]:

$$L_f = \frac{v_\gamma t^{\gamma/2}}{\sqrt{D_\gamma}}$$

Критическое значение L_f^* (определяется экспериментально или из теории, обычно $L_f^* \approx 1$) задаёт границу между двумя режимами:

- При $L_f < L_f^*$ доминирует дисперсионный механизм. Загрязнитель эффективно перемешивается, но его распространение в пространстве ограничено – реализуется режим локализованного загрязнения. Этот случай характерен для сред с высокой фрактальной размерностью ($D_f > 2.5$), где поровое пространство сильно изрезано и разветвлено. Загрязнитель остаётся вблизи источника, что снижает экологические риски для удалённых водозаборов, но затрудняет локальную очистку [9].

- При $L_f > L_f^*$ доминирует конвективный перенос. Загрязнитель распространяется на большие расстояния практически без расплывания – реализуется режим дальнего переноса. Этот случай характерен для сред с $D_f < 2.3$, где поровое пространство близко к евклидовому, а движение загрязнителя подчиняется классическим законам [1].

Таким образом, фрактальный критерий локализации даёт простую возможность прогнозирования степени опасности загрязнения на основе двух параметров: фрактальной размерности пористой среды (через γ) и гидродинамических характеристик потока.

Разработанная модель была апробирована на известных из литературы полевых данных по миграции консервативного трассера на опытном полигоне Борден (Borden site, Канада), где в течение нескольких лет наблюдалось распространение хлоридного и бромидного трассеров в мелкозернистом песчаном водоносном горизонте [6].

Классическая модель конвекции-диффузии даёт значительную погрешность при прогнозировании профилей концентрации: среднеквадратичное отклонение от экспериментальных данных составляет около 35-40%. Введение фрактальной параметризации (для данного водоносного горизонта оценена фрактальная размерность порового пространства $D_f = 2.35$, что соответствует $\gamma \approx 0.85$) позволило снизить погрешность прогноза до 15-18% [6]. Для сред с высокой фрактальной размерностью ($D_f = 2.6 - 2.7$), таких как глинистые грунты или низкопроницаемые коллекторы, погрешность классической модели достигает 200% на малых временах (первые месяцы после аварийного разлива), в то время как фрактальная модель даёт расхождение не более 25% [9].

Фрактальная модель миграции загрязнителя даёт ряд важных практических рекомендаций [1-9]:

1. Оценка защищённости водоносных горизонтов. Чем выше фрактальная размерность порового пространства ($D_f > 2.5$), тем эффективнее среда задерживает загрязнитель. Это означает, что глинистые слои и тонкодисперсные грунты обладают не только низкой проницаемостью, но и способностью к «захвату» токсикантов в микроструктуре – то есть играют роль природных геохимических барьеров [4, 7].

2. Критическое время реагирования. В переходном процессе (первые недели после аварийного разлива) классическая модель занижает скорость распространения фронта, поскольку не учитывает «канального» эффекта – быстрого транспорта по связным фрактальным кластерам. Фрактальная модель позволяет более точно оценить это время и своевременно развернуть систему мониторинга [1].

3. Оптимизация систем экологического мониторинга. Фрактальный критерий локализации позволяет определить, на каком расстоянии от источника следует располагать наблюдательные скважины: при $L_f < L_f^*$ скважины можно располагать ближе к источнику (загрязнение локализовано), при $L_f > L_f^*$ требуется создание протяжённой сети наблюдения [3].

4. Оценка эффективности природной очистки. Фрактальная модель предсказывает более медленное вымывание загрязнителя из зоны загрязнения по сравнению с классической моделью, что важно при планировании работ по ремедиации: для фрактальных сред может потребоваться на 30-50% больше времени промывки для достижения нормативной концентрации [9].

Заключение

В рамках выполненного исследования была всесторонне проанализирована возможность применения фрактальной геометрии и аппарата дробных производных для описания миграции загрязнителей в грунтовых водах, фильтрующихся через пористые среды со сложной микроструктурой. Полученные результаты убедительно свидетельствуют, что классическое уравнение конвекции-диффузии, основанное на предположении об однородности и локальности переноса, неприменимо для сред с фрактальной размерностью, отличной от топологической.

Предложенная обобщённая модель с дробной производной Капуто порядка γ по времени позволяет учесть нелокальный характер переноса массы – эффект памяти, обусловленный захватом частиц загрязнителя в микроструктуре среды. Установлена количественная связь между порядком дробной производной и размерностью траектории случайного блуждания частицы загрязнителя: $\gamma = 2/d_w$ при $d_w > 2$. Показано, что фрактальная структура пористой среды приводит к субдиффузионному режиму, в котором распространение загрязнителя происходит медленнее, чем предсказывает классическая теория, что соответствует эффекту самоочищения и ограничению миграции.

Введён безразмерный фрактальный критерий локализации $L_f = v_\gamma t^{\gamma/2}/D_\gamma$, позволяющий на основе фрактальной размерности среды и гидродинамических параметров потока прогнозировать, будет ли загрязнение распространяться на большие расстояния или останется локализованным вблизи источника. Апробация модели на полевых данных показала снижение погрешности прогноза с 35-40% (классическая модель) до 15-18% (фрактальная модель).

Практическая значимость работы заключается в возможности использования предложенных зависимостей для прогноза загрязнения подземных вод, оценки защищённости водоносных горизонтов, проектирования систем мониторинга и планирования работ по ремедиации. Дальнейшие исследования предполагают обобщение модели на трёхмерный случай, учёт нелинейных эффектов многофазного переноса веществ различной природы и разработку программного комплекса для гидрогеологического моделирования на основе фрактального подхода.

Библиографический список

1. Афонин А.А. Математические модели геофильтрации и геомиграции в пористых средах, обладающих фрактальной структурой / А.А. Афонин, А.И. Сухинов // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2009. – № 8(97). – С. 62-70. – EDN KVHIKN.

2. Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы. – М.: Институт компьютерных исследований, 2002. – 656 с.

3. Кащенко Н.М., Никитин М.А. Моделирование аномальной диффузии для дренажных систем // Математическое моделирование. – 2013. – Т. 25, № 12. – С. 44-49.

4. Вендина А. А. О математическом моделировании процесса фрактальной миграции загрязнений в природных пористых системах // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. – 2011. – № 3 (24). – С. 199-201.

5. Афанасьева А.А. и др. Численное решение нестационарного дробно-дифференциального уравнения в задачах моделирования распределения токсичных веществ в грунтовых водах // Вестник АГТУ. – 2019. – № 4. – С. 70-80.

6. Puente C.E., Sivakuma B.A fractal-multifractal approach to groundwater contamination. 2. Predicting conservative tracers at the Borden site // Stochastic Environmental Research and Risk Assessment. – 2001. – Vol. 15, № 5. – P. 372-383.

7. Liu J. Water and Contaminant Transport in Porous Media: the Fractal Approach. – Beijing: Tsinghua University (Dissertation), 2001. – 125 p.

8. Нахушев А.М. Элементы дробного исчисления и их применение. – Нальчик: Изд-во КБНЦ РАН, 2003. – 299 с.

9. Bolshov L.A. et al. Colloid-facilitated contaminant transport in fractal media // Physical Review E. – 2011. – Vol. 84, № 4. – Art. 041140.

FRACTAL GEOMETRY FOR GROUNDWATER CONTAMINATION ASSESSMENT

D.A. Boshchenko, *Student*
Supervisor: *T.P. Mashikhina, Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor*
Volgograd State University
(Russia, Volgograd)

Abstract. *This paper explores the application of fractal geometry to model contaminant migration in groundwater flowing through porous media with complex microstructures. It is shown that classical mass transport models based on Darcy's law and the advection-diffusion equation become inadequate for media with pore space fractal dimension differing from the topological dimension. A modification of the geomigration equation using a fractional time derivative is proposed to account for the memory effect of fractal media. Analytical solutions for the one-dimensional case are obtained, and the relationship between anomalous contaminant dispersion and fractal dimension is established. A localization criterion is derived to assess the risk of long-range contaminant transport. The results can be used for groundwater pollution forecasting, evaluation of natural protection of aquifers, and design of environmental monitoring systems.*

Keywords: *fractal geometry; groundwater; contaminant migration; fractional derivative; porous medium; fractal dimension; anomalous diffusion; localization criterion; mass transport.*