СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ МЕТОДА ДАЛАМБЕРА И РЯДОВ ФУРЬЕ ПРИ РЕШЕНИИ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ КОЛЕБЛЮЩЕЙСЯ СТРУНЫ

Д.А. Бощенко, *студент*
Научный руководитель: *Т.П. Машихина, канд. пед. наук, доцент*
Волгоградский государственный университет
(Россия, г. Волгоград)

DOI:10.24412/2500-1000-2026-5-2-125-129

Аннотация. *В статье исследуется применение аналитических методов решения волнового уравнения, описывающего поперечные колебания закреплённой струны. Проводится сопоставительный анализ классического подхода Жана Даламбера, основанного на представлении решения в виде суммы бегущих волн, и метода Фурье, использующего разложение начальных условий в тригонометрические ряды. Рассматриваются математические основания каждого метода, их физическая интерпретация, границы применимости и вычислительная эффективность. Особое внимание уделяется вопросу о том, какой из методов даёт более конструктивный аппарат для учёта граничных и начальных условий, а также роли рядов Фурье в формировании современного спектрального подхода к задачам математической физики. Намечаются направления эволюции аналитических методов в контексте численного моделирования колебательных процессов.*

Ключевые слова: *волновое уравнение; колебания струны; метод Даламбера; ряды Фурье; метод разделения переменных; начальные и граничные условия; бегущие и стоячие волны; задача Коши; краевая задача.*

Проблема математического описания колебаний упругой струны занимает особое место в истории математической физики. От первых экспериментов Мерсенна и теоретических обобщений Б. Тейлора до строгой постановки волнового уравнения Ж. Даламбером и последующего тригонометрического анализа Ж. Фурье этот круг задач неизменно служил полигоном для отработки новых аналитических методов. В современном инженерном образовании и научных расчётах решение волнового уравнения остаётся базовым элементом при проектировании струнных датчиков, анализе акустических систем, расчёте вибраций механических конструкций. При этом выбор между методом Даламбера и методом Фурье (разделения переменных) диктуется не только математическими предпочтениями, но и типом начально-краевой задачи, требуемой формой представления решения и возможностями последующей численной реализации.

Волновое уравнение для идеальной струны, закреплённой на концах, в одномерном приближении записывается как классическое гиперболическое уравнение в частных производных второго порядка:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, 0 < x < L, t > 0$$

где u(x,t) – поперечное смещение струны в точке x в момент времени $t, a = \sqrt{\frac{T}{p}}$ – скорость распространения волны (определяется натяжением T и линейной плотностью p), L – длина струны. К уравнению добавляются граничные условия закрепления: $u(0,t) = u(L,t) = 0$ для всех t, а также начальные условия: форма струны u(x,0) = $\psi(x)$ и распределение начальных скоростей $u(x,0) = \phi(x)$. Именно в способе учёта этих условий и кроется принципиальное различие между подходами Даламбера и Фурье [1].

Метод Даламбера, предложенный в 1747 году, представляет собой наиболее изящное аналитическое решение задачи Коши для бесконечной струны. Основная идея заключается в переходе к новым переменным – характеристикам $\xi = x + at, \eta = x - at\eta = x - at$, что позволяет привести волновое уравнение к виду $\frac{\partial 2\mathrm{u}}{\partial \xi \, \partial \eta} = 0$. Интегрируя последовательно, Даламбер получил общее решение, известное как формула бегущих волн:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\phi(x+at) + \phi(x-at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(s)ds$$

Физическая интерпретация этого выражения чрезвычайно прозрачна: начальное отклонение ϕ распадается на две одинаковые волны, бегущие влево и вправо со скоростью a, а начальный импульс порождает волновой «след», накапливающийся в области между характеристиками [2]. Для полубесконечной или конечной струны метод Даламбера дополняется методом отражений: вводятся фиктивные начальные условия нечётным образом, чтобы автоматически удовлетворить условиям закрепления на концах. Этот приём, однако, приводит к тому, что решение на конечном интервале представляется в виде суммы бесконечного ряда отражённых волн, что формально сближает его с рядом Фурье, но сохраняет преимущество в наглядности волновой картины.

Метод Фурье, опубликованный в 1822 году в знаменитой «Аналитической теории тепла», предлагает принципиально иной путь – разложение искомого решения по собственным функциям оператора второй производной. В случае струны с закреплёнными концами собственными функциями являются $\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)$, а соответствующие собственные значения $\lambda_n = \frac{\pi n a}{L}$ задают частоты нормальных колебаний. Решение ищется в виде ряда:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos\frac{\pi n a}{L} t + B_n \sin\frac{\pi n a}{L} t\right) \sin\frac{\pi n}{L} x$$

где коэффициенты A_n, B_nопределяются через разложение начальных условий в ряды Фурье по синусам:

$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L \phi(x) \sin\frac{\pi n}{L} x dx \, , B_n = \frac{2}{\pi n a}\int_0^L \psi(x) \sin\frac{\pi n}{L} x dx$$

Таким образом, метод Фурье представляет колебание струны в виде суперпозиции стоячих волн (гармоник) с дискретным спектром частот, что напрямую соответствует музыкальному восприятию звука [3]. Именно эта возможность – получить физически интерпретируемый спектр – стала главным преимуществом метода Фурье перед подходом Даламбера. Более того, именно метод Фурье открыл путь к спектральному анализу произвольных сигналов, что в XX веке привело к созданию теории обработки сигналов, цифровой фильтрации и быстрого преобразования Фурье.

Сравнительный анализ двух методов следует проводить по нескольким ключевым критериям: универсальность, вычислительная сложность, гладкость решения, удобство учёта граничных условий и возможность обобщения на неоднородные уравнения. Важно также оценить, насколько каждый метод приспособлен к численной реализации и как он ведёт себя при наличии разрывов или особенностей в начальных данных.

Метод Даламбера даёт решение в замкнутой форме, выраженное через конечное число операций над начальными функциями. Для бесконечной струны он практически идеален: ответ записывается явно, легко анализируется, позволяет проследить распространение разрывов (например, если начальная форма имела излом). Однако на конечном интервале метод отражений приводит к необходимости многократного периодического продолжения начальных условий, что при сложной форме $\phi(x)$ или $\psi(x)$ порождает громоздкие кусочно-заданные выражения. Кроме того, метод Даламбера требует, чтобы $\phi(x)$была дважды дифференцируемой, а $\psi(x)$ – один раз дифференцируемой для классического решения; в противном случае решение понимается в обобщённом смысле [4]. На практике это означает, что для начальных условий типа сосредоточенного удара (функция Дирака по скорости) метод Даламбера даёт формальное выражение, требующее дополнительного осмысления в терминах теории распределений.

Метод Фурье, напротив, прекрасно работает именно на конечном интервале и автоматически удовлетворяет граничным условиям благодаря выбору базисных функций. Его основная вычислительная трудность – нахождение коэффициентов ряда через интегралы от начальных условий. Для гладких начальных функций ряд сходится быстро, и для практических расчётов достаточно нескольких первых членов. Более того, метод Фурье естественным образом обобщается на задачи с неоднородными краевыми условиями, с затуханием (добавлением члена $\beta\frac{\partial u}{\partial t}$) и на вынужденные колебания с внешней силой $f(x,t)$. В этих случаях используется разложение правой части в ряд по тем же собственным функциям и метод вариации постоянных [5]. Показательно, что при добавлении затухания, пропорционального скорости, метод Фурье приводит к появлению экспоненциально затухающих множителей у каждой гармоники, что полностью соответствует физическим представлениям о диссипации энергии в реальных струнах.

Ключевой недостаток метода Фурье долгое время был связан с вопросом сходимости рядов. Сам Фурье утверждал, что любой сигнал можно разложить в тригонометрический ряд, однако строгое обоснование было дано лишь спустя десятилетия трудами Дирихле и Римана. Для функций, имеющих разрывы первого рода, ряд Фурье сходится к среднему арифметическому левого и правого пределов (явление Гиббса), что при моделировании струны с сосредоточенным начальным отклонением даёт мелкие осцилляции вблизи точки разрыва. Метод Даламбера в таких случаях даёт кусочно-гладкое решение без паразитных пульсаций, но ценой усложнения аналитической записи [6]. Это явление Гиббса остаётся предметом изучения до сих пор, и для его подавления в численных расчётах применяют специальные методы сглаживания – так называемые «оконные функции» или суммирование по Фейеру.

Если обратиться к исторической динамике применения этих методов, можно увидеть смену приоритетов. В XVIII веке, когда волновое уравнение только начинало изучаться, метод Даламбера доминировал благодаря своей аналитической замкнутости и тесной связи с теорией характеристик. Спор между Даламбером, Эйлером и Бернулли о том, какие функции допустимы в качестве начальных условий, фактически стимулировал развитие понятий обобщённой функции и слабого решения. В XIX веке метод Фурье, несмотря на первоначальное сопротивление строгих математиков (Лагранж, Пуассон), стал стандартным инструментом в математической физике, особенно после работ Стеклова о полноте систем собственных функций [1].

В современной практике инженерных и физических расчётов выбор метода определяется типом задачи. Если требуется быстро получить аналитическую оценку реакции бесконечной среды на локальное возмущение (например, удар по струне), используется метод Даламбера. Если же проектируется музыкальный инструмент или анализируется спектр вибраций конечной струны с заданными граничными условиями, метод Фурье незаменим. Более того, именно метод Фурье лёг в основу спектрального анализа сигналов и быстрого преобразования Фурье (FFT), без которого немыслима современная цифровая обработка акустических и вибрационных данных [7]. В современных компьютерных системах звукового синтеза, таких как физическое моделирование фортепиано или гитары, метод Фурье используется для генерации тембров, а метод Даламбера – для моделирования распространения волн по корпусу инструмента.

Важно подчеркнуть, что метод Фурье не просто альтернатива, но и развитие идей Даламбера. Показывается, что ряд Фурье для конечной струны эквивалентен методу отражений Даламбера при нечётном периодическом продолжении начальных условий. Действительно, если разложить $\phi(x)$ и $\psi(x)$ в ряды по синусам, подставить в формулу Даламбера и использовать тригонометрические тождества для преобразования суммы бегущих волн в сумму стоячих, получается в точности решение Фурье. Таким образом, оба метода есть два языка описания одного физического явления: язык бегущих волн более естественен для задач Коши на неограниченной области, а язык стоячих волн – для краевых задач на ограниченном интервале [2]. Математически эта эквивалентность выражается в том, что преобразование Фурье по пространственной переменной переводит гиперболическое уравнение в семейство обыкновенных дифференциальных уравнений по времени, а метод характеристик Даламбера является прямым решением в пространственно-временной области.

Отдельного внимания заслуживает дидактическая роль сопоставления этих методов при подготовке инженеров и физиков. Изучение метода Даламбера развивает пространственно-временное мышление, понимание характеристик и волнового фронта. Изучение метода Фурье формирует навыки спектрального анализа и работы с ортогональными разложениями. Наиболее эффективные учебные курсы строятся так: сначала на простых примерах (симметричное треугольное начальное отклонение) решение находится обоими методами и сравнивается почленно; затем студентам предлагается задача, где один из методов явно удобнее другого (например, начальная скорость, локализованная в малой окрестности). Такой бинарный подход закладывает основу для дальнейшего изучения уравнений теплопроводности, Лапласа и волнового уравнения в многомерных областях [3].

Современные вычислительные среды, такие как MATLAB, Mathematica и Python с библиотеками NumPy/SciPy, реализуют оба подхода. Для численного решения волнового уравнения методом Даламбера достаточно дискретизировать начальные условия и применить формулу (2) с линейной интерполяцией. Метод Фурье требует вычисления интегралов (4) с помощью быстрого преобразования Фурье, что делает его чрезвычайно эффективным для задач с гладкими начальными данными. Более того, в задачах акустики помещений и моделирования музыкальных инструментов метод Фурье позволяет рассчитать собственные частоты и формы колебаний один раз, а затем использовать их для анализа отклика на произвольное возбуждение. Именно эта идея – суперпозиция собственных мод – лежит в основе метода конечных элементов и спектральных методов, которые являются стандартом инженерного анализа вибраций.

Перспективы дальнейшего развития аналитических методов связаны с их интеграцией в гибридные алгоритмы. Например, вблизи границ или неоднородностей, где ряд Фурье сходится медленно, может применяться метод Даламбера с локальными отражениями, а в объёме – спектральное разложение. Такие комбинированные подходы активно разрабатываются в рамках методов расщепления операторов. Кроме того, методы, основанные на рядах Фурье, обобщаются на случай струны с переменной плотностью или переменным натяжением, где собственные функции уже не являются тригонометрическими, но метод разделения переменных сохраняет силу, приводя к задаче Штурма–Лиувилля.

Заключение

В результате проведённого сравнительного анализа установлено, что метод Даламбера и метод Фурье не конкурируют, а взаимно дополняют друг друга в задачах о колебаниях струны. Метод Даламбера, основанный на представлении решения в виде суммы бегущих волн, оптимален для бесконечной или полубесконечной струны, даёт явную аналитическую формулу и наглядно демонстрирует волновую природу процесса. Метод Фурье (разделение переменных) превращает краевую задачу в спектральную задачу на собственные значения, представляя колебание как сумму стоячих гармоник; он незаменим для конечной струны с закреплёнными концами, легко обобщается на неоднородные и диссипативные системы, а также лежит в основе численных методов типа спектральных элементов. Оба метода исторически стимулировали развитие строгих разделов анализа – теории обобщённых функций и теории сходимости тригонометрических рядов. В современной практике расчётов выбор метода диктуется типом начально-краевых условий и требуемой формой выходных данных: для волновой картины во времени предпочтителен Даламбер, для частотного анализа – Фурье. Дальнейшее развитие аналитических методов идёт по пути их сращивания с численным моделированием, где ряды Фурье служат основой для быстрых алгоритмов, а метод характеристик Даламбера – для построения адаптивных сеток. Таким образом, оба метода сохраняют свою ценность как фундаментальные инструменты математической физики и инженерного проектирования.

Библиографический список

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – 7-е изд. – М.: Изд-во МГУ, 2018. – [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://ijevanlib.ysu.am/wp-content/uploads/2018/01/converted_file_81e63622.pdf.
2. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. — 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука, 1990. – [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://archive.org/details/vladimirov-equations-of-mathematical-physics/.
3. Арсенин В.Я. Методы математической физики и специальные функции. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука, 1989. – [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://studfile.net/preview/19263989/.
4. Очан Ю.С. Сборник задач по методам математической физики. – М.: Просвещение, 1967. – [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://obuchalka.org/20190820112905/sbornik-zadach-po-metodam-matematicheskoi-fizik-ochan-u-s-1967.html.
5. Петровский И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными. – 4-е изд. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2022. – [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://books.google.com.hk/books?id=tAB4CwAAQBAJ.
6. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. – М.: Высшая школа, 1970. – [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://scinetwork.ru/disk/file/15017.
7. Калиткин Н.Н. Численные методы. – 2-е изд., испр. – СПб.: БХВ-Петербург, 2011. – [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://vdoc.pub/documents/-42cnofucntc0.

COMPARATIVE ANALYSIS OF D'ALEMBERT'S METHOD AND FOURIER SERIES IN SOLVING THE WAVE EQUATION FOR A VIBRATING STRING

D.A. Boshchenko, *Student*
Supervisor: *T.P. Mashikhina, Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor*
Volgograd State University
(Russia, Volgograd)

Abstract. *This article investigates the application of analytical methods for solving the wave equation that describes transverse vibrations of a fixed string. A comparative analysis is carried out between the classical approach by Jean d'Alembert, based on the representation of the solution as a sum of travelling waves, and the Fourier method, which employs expansion of initial conditions into trigonometric series. The mathematical foundations of each method, their physical interpretation, applicability limits and computational efficiency are examined. Special attention is given to the question of which method provides a more constructive framework for incorporating boundary and initial conditions, as well as to the role of Fourier series in shaping the modern spectral approach to problems in mathematical physics. Future directions in the evolution of analytical methods in the context of numerical simulation of oscillatory processes are outlined.*

Keywords: *wave equation; string vibrations; d'Alembert method; Fourier series; separation of variables; initial and boundary conditions; travelling and standing waves; Cauchy problem; boundary value problem.*