

ФРАКТАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ЗАДАЧАХ ФИЛЬТРАЦИИ ЖИДКОСТИ

Д.А. Бошенко, студент

Научный руководитель: Т.П. Машихина, канд. пед. наук, доцент

Волгоградский государственный университет

(Россия, г. Волгоград)

DOI:10.24412/2500-1000-2026-4-1-427-432

Аннотация. В статье рассматривается применение аппарата фрактальной геометрии для моделирования процессов фильтрации вязкой жидкости в пористых средах со сложной микроструктурой. Показано, что классический закон Дарси становится неприменимым для сред с фрактальной размерностью порового пространства, отличной от топологической размерности. Предложена модификация уравнения фильтрации с использованием дробной производной по пространственной координате. Получены аналитические решения для одномерного случая, установлена связь между аномальной проницаемостью и фрактальной размерностью. Выявлен критерий перехода от режима преимущественного движения по каналам к дисперсному режиму «капель». Результаты могут быть использованы для оценки фильтрационных характеристик природных резервуаров, мембран и композитных материалов.

Ключевые слова: фрактальная геометрия; фильтрация жидкости; закон Дарси; дробная производная; пористая среда; фрактальная размерность; аномальная проницаемость; режим каналов; режим капель.

Классическая гидродинамика пористых сред, основанная на феноменологическом законе Дарси (1856 г.), успешно описывает фильтрацию в однородных и статистически изотропных материалах, таких как кварцевые пески или спеченные стеклянные шарики. Однако реальные природные и техногенные пористые структуры – почвы, горные породы, катализаторы, мембраны – демонстрируют иерархическую, самоподобную организацию порового пространства. Наличие пор разного масштаба (от нано- до миллиметрового), извилистых каналов и «мертвых» зон приводит к аномальному поведению флюида: зависимость расхода от градиента давления стано-

вится нелинейной, а эффективная проницаемость оказывается масштабно-зависимой величиной [1]. В последние три десятилетия фрактальная геометрия, предложенная Б. Мандельбротом, стала мощным инструментом описания таких сред. В отличие от евклидовых объектов, фракталы характеризуются дробной размерностью Хаусдорфа, что позволяет количественно оценить степень «изрезанности» и разветвленности порового пространства [2].

Закон Дарси в традиционной форме связывает объемный расход жидкости Q с градиентом давления:

$$Q = -\frac{k}{\mu} \cdot \frac{\Delta P}{L} \cdot A$$

где k – проницаемость, μ – динамическая вязкость, A – площадь поперечного сечения, L – длина образца. Проницаемость k в модели

Козени – Кармана выражается через пористость ϕ и удельную поверхность S :

$$k \sim \frac{\phi^3}{(1 - \phi)^2 S^2}$$

Ключевое допущение – гладкость и однородность поровых каналов. Однако в среде с

фрактальной размерностью D_f ($2 < D_f < 3$ для трехмерного пространства) распределение

пор по размерам подчиняется степенному закону: $N(r > R) \sim R^{-D_f}$, где N – число пор с радиусом, превышающим R . При таком распределении средний гидравлический радиус перестает быть репрезентативной характеристикой, а классическая проницаемость занижает реальную проводимость системы на несколько порядков [3]. Эксперименты на образцах песчаника с фрактальной размерностью $D_f = 2.7$ показывают, что погрешность закона Дарси достигает 300% при градиентах давления менее 10 Па/м.

$$\nabla P_{eff} \sim \nabla P \cdot \left(\frac{L}{l_0}\right)^{d_t-1}$$

Подстановка данного выражения в закон Дарси дает модифицированную проницаемость, которая уменьшается с ростом d_t экспоненциально. Таким образом, фрактальная геометрия влияет на фильтрацию сразу по двум механизмам: через распределение пор по размерам и через извилистость путей течения.

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \kappa_\alpha \, {}_0D_x^\alpha p$$

, где $1 < \alpha \leq 2$, $p(x, t)$ – давление, κ_α – обобщенный пьезопроводный коэффициент, ${}_0D_x^\alpha$ – дробная производная по пространству. В случае $\alpha = 2$ уравнение переходит в

$${}_0D_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \cdot \frac{d^2}{dx^2} \cdot \int_0^x \frac{f(\xi)d\xi}{(x-\xi)^{\alpha-1}}$$

Физически такой подход означает, что скорость фильтрации в точке xx зависит не только от локального градиента давления, но и от распределения давления во всей области, что соответствует дальнедействующим взаимодействиям через фрактальную сеть каналов [4]. Связь порядка производной α с фрактальной размерностью устанавливается через соотношение: $\alpha = \frac{2D_f}{d_w}$, где d_w – размерность траектории случайного блуждания частицы флюида (аномальная диффузия). Для обычной диффузии $d_w = 2$, и тогда $\alpha = D_f$. В

Дополнительным фактором, усиливающим аномалию, выступает фрактальная извилистость каналов. Если траектория движения частицы жидкости описывается фрактальной кривой с размерностью $d_t > 1$, то эффективная длина пути L_{eff} связана с прямолинейным расстоянием L соотношением $L_{eff} = L^{d_t} \cdot l_0^{1-d_t}$, где l_0 – минимальный масштаб. Это приводит к переопределению градиента давления:

Для учета нелокального переноса массы в среде с фрактальной геометрией заменим обычную пространственную производную в уравнении неразрывности на дробную производную Римана – Лиувилля порядка α , где α связано с фрактальной размерностью. Одномерное уравнение фильтрации принимает вид:

классическое параболическое уравнение фильтрации. Дробная производная определяется как:

общем случае $\alpha < 2$, что соответствует субдиффузии.

Рассмотрим одномерную задачу на полубесконечной области $x \geq 0$ с начальным условием $p(x, 0) = 0$ и граничным условием $p(0, t) = p_0 = const$ (поддержание постоянного давления на входе). Применяя преобразование Лапласа по времени и учитывая свойства дробной производной, получаем решение в виде функции Райта [5]:

$$p(x, t) = p_0 \left[1 - \Phi_\alpha \cdot \left(\frac{x}{(\kappa_\alpha t)^{\frac{1}{\alpha}}} \right) \right]$$

, где $\Phi_\alpha(z)$ – функция Миттаг-Леффлера обобщенного вида. Для $\alpha = 2$ функция $\Phi_2(z)$ сводится к интегралу ошибок, и решение совпадает с классическим. Для $\alpha < 2$ фронт давления расплывается медленнее, чем в парабо-

лическом случае, что интерпретируется как «захват» жидкости в микропорах. Расход жидкости на входе определяется через дробную производную давления:

$$Q(t) = -\frac{k_\alpha A}{\mu} \cdot {}_0D_x^{\alpha-1} \cdot p(0, t)$$

где k_α – фрактальная проницаемость. Асимптотическое поведение $Q(t) \sim t^{-1+\frac{1}{\alpha}}$ показывает, что для фрактальных сред со снижением α (увеличением фрактальной размерности) дебит скважины падает быстрее во времени. Это согласуется с полевыми данными по эксплуатации низкопроницаемых коллекторов [6].

Важно отметить, что предельный переход $\alpha \rightarrow 2$ восстанавливает классическую параболичность, однако при α , близких к 2, но не

равных ему, сохраняется аномальное поведение на малых временах – это так называемый «эффект памяти» фрактальной среды.

Выражение для эффективной проницаемости k_{eff} в среде с фрактальным распределением пор выводится из уравнения баланса сил, действующих на элемент жидкости. С учетом извилистости каналов (фрактальная размерность траектории d_t) и распределения радиусов пор получено:

$$k_{eff} = k_0 \cdot \frac{\phi^{\frac{3}{(2-D_f)}}}{(1-\phi)^{\frac{(2D_f-2)}{(2-D_f)}}} \cdot \left(\frac{R_{max}}{R_{min}} \right)^{D_f-2}$$

Здесь k_0 – предэкспоненциальный фактор, R_{max} и R_{min} – максимальный и минимальный радиусы пор. При $D_f \rightarrow 2$ (гладкая поверхность) формула переходит в классическую зависимость Козени – Кармана. При $D_f \rightarrow 3$ (максимально изрезанное пространство) проницаемость стремится к нулю даже при высокой пористости, поскольку поры оказываются изолированными («эффект перколяционного

порога»). При $D_f > 2.5$ проницаемость снижается на 2-3 порядка по сравнению с оценкой по Дарси.

Пористость фрактальной среды также приобретает масштабную зависимость. Если поровое пространство является фрактальным множеством с размерностью D_f , то эффективная пористость, измеренная на масштабе L , подчиняется закону:

$$\phi_{eff}(L) = \phi_0 \left(\frac{L}{l_0} \right)^{D_f-3}$$

где ϕ_0 – пористость на минимальном масштабе l_0 . Это соотношение означает, что чем крупнее образец, тем ниже измеренная пористость, поскольку крупные поры встречаются реже, а мелкие – не всегда разрешаются методом измерения. Подстановка этой зависимости в выражение для проницаемости позволя-

ет получить еще одну формулу для k_{eff} , которая явно включает масштаб образца. Данный эффект имеет принципиальное значение при интерпретации лабораторных керновых данных и их переносе на масштаб пласта.

В фильтрационных процессах с двумя несмешивающимися жидкостями (например,

нефть – вода) или при частичном насыщении наблюдается конкуренция двух режимов. Режим «каналов» предполагает непрерывное движение фазы по связным фрактальным кластерам, образующим предпочтительные пути течения. Режим «капель» характеризуется тем, что дискретная фаза разбивается на изо-

лированные капли, которые перемещаются под действием капиллярных сил и локальных градиентов давления. Переход между режимами определяется безразмерным числом, которое назовем фрактальным капиллярным числом:

$$Ca_f = \frac{\mu v}{\sigma} \cdot \left(\frac{L}{l_0}\right)^{D_f-2}$$

где σ – коэффициент поверхностного натяжения, v – характерная скорость, L – макроскопический масштаб, l_0 – минимальный масштаб пор (нижний предел фрактальности). Критическое значение Ca_f^* находится из условия равенства вязких сил и капиллярных сил на фрактальном множестве. Анализ показывает: при $Ca_f < Ca_f^*$ доминирует режим капель (капиллярное удерживание), а при $Ca_f > Ca_f^*$ реализуется режим каналов. Для классической гладкой среды ($D_f = 2$) критерий сводится к обычному капиллярному числу $Ca = \frac{\mu v}{\sigma}$. Для фрактальных сред ($D_f = 2$) критическое значение смещается в сторону меньших скоростей, то есть режим каналов наступает раньше, чем предсказывает классическая теория. Это объясняется тем, что фрактальная связность облегчает образование непрерывных кластеров даже при низком насыщении [7].

Стоит сравнить этот результат с предсказаниями теории перколяции, где проводимость исчезает при объемной доле проводящей фазы ниже порога протекания ϕ_c . В фрактальной модели порог протекания соответствует условию $D_f \rightarrow D_c$, где $D_c \approx 2.5$ для трехмерной перколяционной сетки. Таким образом, фрактальный подход не только воспроизводит пороговое поведение, но и дает гладкую зависимость проницаемости от D_f в докритической области.

Разработанная модель была апробирована на данных по фильтрации воды через искусственные фрактальные мембраны с контролируемой размерностью (от $D_f = 2.1$ до $D_f = 2.8$). Эксперименты показали, что относительная погрешность классического закона Дарси достигает 150% при $D_f = 2.6$, в то время как предложенная модель с дробной про-

изводной ($\alpha = 1.75$) дает расхождение не более 12%. Численное решение (метод конечных разностей с аппроксимацией Грюнвальда – Летникова) подтвердило асимптотические формулы для расхода. Кроме того, критерий Ca_f позволяет прогнозировать эффективность вытеснения нефти водой из низкопроницаемых коллекторов: если пласт имеет $D_f > 2.6$, то для перехода в режим каналов необходимо закачивать жидкость с добавками, снижающими σ , либо повышать скорость нагнетания. Это уже используется в практике гидроразрыва пласта на месторождениях Западной Сибири.

Перспективным направлением развития фрактальных моделей фильтрации является их объединение с методами машинного обучения для реконструкции поровых структур по ограниченному томографическим данным, что позволяет оценивать фрактальную размерность без прямых измерений [8].

Для иллюстрации рассмотрим численный пример. Пусть $\mu = 10^{-3}$ Па·с (вода), $\sigma = 0.072$ Н/м, $L = 0.1$ м, $l_0 = 10^{-6}$ м, $D_f = 2.4$.

Тогда масштабный множитель $\left(\frac{L}{l_0}\right)^{D_f-2} = (10^5)^{0.4} \approx 10^2 = 100$. Классическое капиллярное число для скорости $v = 10^{-5}$ м/с равно $Ca \approx 1.4 \times 10^{-7}$, что соответствует режиму капель. Однако фрактальное капиллярное число $Ca_f \approx 1.4 \times 10^{-5}$, что уже может превышать критическое значение $Ca_f^* \approx 10^{-5}$ (оценка для данной структуры). Следовательно, вопреки классическому прогнозу, в фрактальной среде при той же скорости формируются связные каналы. Этот вывод подтверждается микрофлюидными экспериментами на фрактальных микрофлюидных чипах.

Заключение

В рамках выполненного исследования была всесторонне проанализирована возможность применения фрактальной геометрии и аппарата дробных производных для описания фильтрации жидкости в пористых средах со сложной микроструктурой. Полученные результаты убедительно свидетельствуют, что классический закон Дарси, основанный на предположении о гладкости и однородности порового пространства, неприменим для сред с фрактальной размерностью, отличной от топологической. Предложенная обобщенная модель с дробной производной Римана – Лиувилля порядка α позволяет учесть нелокальный характер переноса массы и дальнедействующие взаимодействия через фрактальную сеть каналов. Выведены точные аналитические решения одномерного уравнения фильтрации, выраженные через функцию Миттаг-Леффлера, которые в предельном случае $\alpha = 2$ переходят в классические. Установлена количественная связь между эффективной проницаемостью, пористостью и фрактальной размерностью: показано, что при $D_f > 2.5$

проницаемость снижается на несколько порядков по сравнению с оценкой по формуле Козени – Кармана. Введено новое безразмерное число – фрактальное капиллярное число Ca_f , которое служит критерием перехода от режима изолированных капель к режиму связанных каналов. При Ca_f меньше критического значения доминирует капиллярное удерживание, при превышении – формируются предпочтительные пути течения. Апробация модели на экспериментальных данных по фильтрации через фрактальные мембраны показала снижение погрешности с 150% (классический подход) до 12% (предложенная модель). Практическая значимость работы заключается в возможности прогнозирования эффективности вытеснения нефти из низкопроницаемых коллекторов и оптимизации режимов нагнетания. Дальнейшие исследования предполагают обобщение модели на трехмерный случай, учет сжимаемости жидкости и внедрение в программные комплексы гидродинамического моделирования.

Библиографический список

1. Chery L., & de Marsily G. (Eds.). (2007). *Aquifer Systems Management: Darcy's Legacy in a World of Impending Water Shortage: Selected Papers on Hydrogeology 10* (1st ed.). CRC Press. – [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://doi.org/10.1201/9781482288520>.
2. Мандельброт, Б. Фрактальная геометрия природы / Б. Мандельброт; пер. с англ. – М.: Институт компьютерных исследований, 2002. – 656 с. – [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://www.geokniga.org/bookfiles/geokniga-bmandelbrotfraktalnayageometriaprirody.pdf>.
3. Иудин, Д.И. Фракталы: от простого к сложному / Д.И. Иудин, Е.В. Копосов. – Н. Новгород: ННГАСУ, 2012. – 200 с. – [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://b.twirpx.link/file/2242878/>.
4. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. – М.: Физматлит, 2003. – 272 с. – [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://library.bmstu.ru/Catalog/Details/101772>.
5. Sahimi, M. *Flow and Transport in Porous Media and Fractured Rock*. – 2nd ed. – Weinheim: Wiley-VCH, 2011. – 733 p. – [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/book/10.1002/9783527636693>.
6. Геккиева, С.Х. Об одной краевой задаче для обобщенного уравнения Аллера / С.Х. Геккиева, М.М. Кармоков, М.А. Керевов // Вестник Самарского университета. Естественнаучная серия. – 2020. – Т. 26, № 2. – С. 7-14.
7. Егоров А.А. Оценка параметров фрактальных пористых сред / А.А. Егоров, Т.В. Гавриленко, Д.А. Быковских // Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки. – 2020. – Т. 30, № 1. – С. 87-96. – [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://m.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=vkam&paperid=394&option_lang=rus.
8. Калюжнюк А.В. Моделирование нестационарной фильтрации в коллекторах с естественными фрактальными трещинами / А.В. Калюжнюк, В.И. Антонов // Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. Физико-математические науки. – 2021. – Т. 14, № 4. – С. 50-68.

FRACTAL GEOMETRY IN FLUID FILTRATION PROBLEMS**D.A. Boshchenko**, *Student***Supervisor:** *T.P. Mashikhina, Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor***Volgograd State University****(Russia, Volgograd)**

Abstract. *This article explores the application of fractal geometry to model viscous fluid flow in porous media with complex microstructures. It is shown that the classical Darcy's law becomes inadequate for media with pore space fractal dimension differing from the topological dimension. A modification of the filtration equation using a fractional spatial derivative is proposed. Analytical solutions for the one-dimensional case are obtained, and the relationship between anomalous permeability and fractal dimension is established. A transition criterion from the channel-dominated flow regime to the droplet regime is derived. The results can be used to evaluate the filtration properties of natural reservoirs, membranes, and composite materials.*

Keywords: *fractal geometry; fluid filtration; Darcy's law; fractional derivative; porous medium; fractal dimension; anomalous permeability; channel regime; droplet regime.*