

## РЕШЕНИЕ КОНКУРЕНТНЫХ ЗАДАЧ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПОПУЛЯЦИЙ НА ПРИМЕРЕ МОДЕЛИ ЛОТКИ-ВОЛЬТЕРРЫ

**О.А. Кишкинова**, старший преподаватель

**Н.А. Вerezубова**, канд. экон. наук, доцент

**Н.М. Томилова**, студент

**Московская государственная академия ветеринарной медицины и биотехнологии – МВА имени К.И. Скрябина**  
(Россия, г. Москва)

DOI:10.24412/2500-1000-2025-3-1-339-343

***Аннотация.** Модель Лотки-Вольтерры служит фундаментальным инструментом для анализа динамики популяций в экосистемах и биотехнологических процессах. В статье детально рассмотрены принципы работы этой математической системы, её практическое применение в биотехнологии, а также роль в изучении межвидовых взаимодействий и оптимизации промышленных процессов. Произведен анализ возможностей расширения классической модели для описания многовидовых систем и сложных пищевых цепей, прогнозирования эпидемиологических процессов путём адаптации модели для анализа распространения инфекционных заболеваний и разработки стратегий борьбы с антибиотикорезистентностью. Рассмотрены ее основные преимущества: адаптивность, точность, междисциплинарность. Особое внимание уделено современным модификациям модели при вмешательстве в природные экосистемы, расширяющим её применимость в условиях глобальных экологических вызовов. Доказывается, что модель Лотки-Вольтерры не просто историческое наследие, а живой фундаментальный инструмент для решения глобальных вызовов нашего времени, позволяет не только объяснять наблюдаемые явления, но и прогнозировать долгосрочные последствия вмешательства в экосистемы.*

***Ключевые слова:** модель Лотки-Вольтерры, биотехнология, природные экосистемы, математическое моделирование, популяционная динамика, система математических уравнений, многовидовые системы.*

Современная биология, сталкиваясь с возрастающей сложностью экологических процессов и усилением антропогенного воздействия на природные системы, всё чаще обращается к методам математического моделирования. Одним из фундаментальных инструментов в этой области стала модель Лотки-Вольтерры, разработанная Альфредом Лоткой и Вито Вольтеррой в 1920-х годах. Первоначально созданная для описания колебаний численности хищников и жертв, эта модель прошла значительную эволюцию, превратившись в универсальный аппарат, применяемый в экологии, эпидемиологии, экономике и даже социальных науках [11, 12].

Исторический контекст возникновения модели тесно связан с необходимостью объяснения периодических колебаний популяций в природе. Ярким примером могут служить наблюдения за динамикой численности зайцев и рысей в канадских лесах, где десятилетние циклы изменений долгое время оставались загадкой для биологов. Модель Лотки-

Вольтерры позволила не только объяснить эти колебания, но и предсказать их параметры с высокой точностью [13]. В условиях современных климатических изменений и роста антропогенной нагрузки на экосистемы актуальность модели продолжает возрастать, требуя её постоянной адаптации к новым вызовам.

Развитие модели шло параллельно с совершенствованием вычислительных технологий. Если в начале XX века исследователи ограничивались аналитическим решением упрощённых уравнений, то сегодня, с появлением мощных компьютеров, стало возможным моделирование сложных систем с учётом множества дополнительных факторов. Это открыло новые горизонты для применения модели в прикладных исследованиях – от оптимизации биотехнологических процессов до прогнозирования распространения эпидемий.

Цель данного исследования заключается в систематизации современных подходов к адаптации модели Лотки-Вольтерры для ре-

шения междисциплинарных научных и практических задач.

В рамках исследования решаются следующие задачи:

1. Анализ возможностей расширения классической модели для описания многовидовых систем и сложных пищевых цепей, характерных для современных экосистем.

2. Интеграция пространственно-временных факторов, включая миграционные процессы и изменения среды обитания, в математический аппарат модели.

3. Оптимизация биотехнологических процессов на основе модифицированных уравнений, учитывающих взаимодействие микроорганизмов в промышленных биореакторах.

4. Прогнозирование эпидемиологических процессов путём адаптации модели для анализа распространения инфекционных заболеваний и разработки стратегий борьбы с антибиотикорезистентностью.

Каждое из этих направлений требует детального рассмотрения как теоретических аспектов модели, так и их практической реализации в конкретных исследованиях.

**Материалы и методы.** Основу исследования составила классическая система дифференциальных уравнений, описывающая динамику популяций ( $y$ ) и жертв ( $x$ ). Эти уравнения, несмотря на свою математическую простоту, демонстрируют удивительную способность отражать фундаментальные биологические закономерности:

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x - \beta xy \quad (1)$$

$$\frac{dy}{dt} = \delta xy - \gamma y \quad (2)$$

Детальный анализ параметров модели.

Коэффициент естественного прироста жертв ( $\alpha$ ). Для зайцев в канадских лесах этот параметр составляет  $0,5 \text{ мес}^{-1}$ , что отражает их высокую репродуктивную способность. Одна пара зайцев при отсутствии хищников способна произвести до 20 потомков за год, создавая экспоненциальный рост популяции.

Эффективность охоты хищников ( $\beta$ ). Значение  $0,03 \text{ ос}^{-1} \cdot \text{мес}^{-1}$  для рысей было рассчитано на основе данных GPS-трекинга, показавших, что только 15% атак завершаются успехом. Это обусловлено как особенностями рельефа местности, так и защитным поведением жертв.

Коэффициент преобразования биомассы ( $\delta$ ). Для рыси массой 10 кг суточная потребность в энергии составляет около 2000 ккал, что эквивалентно потреблению одного зайца каждые 2 дня. Это соотношение легло в основу расчёта параметра  $\delta = 0,01 \text{ ос}^{-1} \cdot \text{мес}^{-1}$  [13].

Естественная смертность хищников ( $\gamma$ ). Значение  $0,2 \text{ мес}^{-1}$  включает в себя как возрастные изменения, так и заболевания. Интересно, что для крупных хищников, таких как львы, этот параметр обычно ниже ( $0,15 \text{ мес}^{-1}$ ), что связано с их положением на вершине пищевой цепи [1].

Современные модификации модели.

1. Учёт пространственной диффузии.

Уравнение с коэффициентом миграции:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = D_x \nabla^2 x + \alpha x - \beta xy \quad (3)$$

Здесь  $D_x = 0,8 \text{ км}^2/\text{мес}$ . отражает скорость распространения львов в африканских саваннах. Это значение было получено в ходе многолетних наблюдений с использованием радиометок и спутникового мониторинга [5].

2. Интеграция стохастических эффектов.

Стохастическая модель с винеровским процессом:

$$dx_t = (\alpha x_t - \beta x_t y_t) dt + \sigma x_t dW_t \quad (4)$$

Параметр  $\sigma = 0,05$  характеризует влияние случайных событий (пожаров, наводнений) на популяцию. В тропических лесах Амазонии, где частота экстремальных погодных явлений выше, это значение увеличивается до 0,12 [6].

#### Результаты исследования.

1. Экологические системы: восстановление баланса.

Йеллоустонский национальный парк стал наглядной демонстрацией возможностей модели. После реинтродукции волков в 1995 году:

- популяция оленей сократилась на 60% за 10 лет, что точно соответствовало прогнозам ( $\beta = 0,05 \text{ ос}^{-1} \cdot \text{мес}^{-1}$ );
- восстановление ивовых зарослей на 300% создало благоприятные условия для бобров, что привело к формированию новых водоёмов;
- увеличение биоразнообразия птиц на 40% подтвердило каскадный эффект, предсказанный моделью [13].

Эти изменения наглядно демонстрируют, как математическое моделирование позволяет не только объяснять наблюдаемые явления, но и прогнозировать долгосрочные последствия вмешательства в экосистемы.

Арктические экосистемы требуют особого подхода в связи с ускоренным таянием льдов. Применение модели с учётом климатических изменений позволило выявить:

- ежегодную потерю 13% ледового покрова, что критически сокращает кормовую базу тюленей;
- снижение численности белых медведей до 67-73% к 2100 году даже при умеренном сценарии глобального потепления [9].

Эти данные легли в основу международных программ по защите арктической фауны, подчёркивая важность моделирования для разработки природоохранных стратегий.

2. Биотехнология: от теории к практике.

Производство пенициллина – успешный пример промышленного применения модели. Уравнения для системы *Penicillium* ( $x$ ) и бактерий-конкурентов ( $y$ ):

$$\frac{dx}{dt} = 0,3x - 0,05xy \quad (5)$$

$$\frac{dy}{dt} = 0,04xy - 0,25y \quad (6)$$

- поддержание pH=4,7 снижает активность бактерий ( $\beta$  уменьшается до 0,03) за счёт подавления их ферментативных систем;

- температура 30°C увеличивает выход антибиотика на 27%, оптимизируя метаболизм грибов [3].

Эти параметры были установлены в ходе серии экспериментов, где модель использовалась для прогнозирования динамики роста микроорганизмов в различных условиях.

Биогазовые установки демонстрируют важность временных задержек в биотехнологических процессах. При введении 12-часовой паузы между стадиями кислотогенеза и метаногенеза:

- концентрация летучих кислот снижается с 8 до 2,8 г/л, предотвращая ингибирование метаногенных архей;

- выход метана возрастает на 42%, что делает процесс экономически рентабельным [9].

3. Медицина: вызовы современности.

Моделирование пандемии COVID-19 с использованием модифицированной модели SEIR показало:

- стратегия «умного карантина», охватывающая 35% населения, снижает пиковую нагрузку на больницы на 35%;
- экономические потери сокращаются на 22% по сравнению с полным локдауном [7].

Эти результаты подчёркивают важность гибкого подхода к управлению эпидемиями, основанного на данных математического моделирования.

Борьба с антибиотикорезистентностью требует учёта конкуренции между штаммами:

$$\frac{dS}{dt} = 0,8S - 0,6SR - 0,1SA \quad (7)$$

$$\frac{dR}{dt} = 0,5R - 0,4RS + 0,1SA \quad (8)$$

Сокращение курса лечения с 14 до 11 дней увеличивает долю резистентных штаммов с 12% до 31%. Что подтверждает необходимость строгого соблюдения протоколов терапии и разработки новых подходов к лечению [10].

**Заключение.** Модель Лотки-Вольтерры, пройдя столетний путь развития, продолжает оставаться актуальным инструментом биологических исследований. Её основные преимущества включают:

- адаптивность – возможность интеграции с методами искусственного интеллекта для обработки больших данных;

- точность – ошибка прогнозов в экологии не превышает 5-8% при корректной калибровке параметров;

- междисциплинарность – успешное применение в медицине, биотехнологии и климатологии.

Перспективы развития модели связаны с созданием гибридных систем, сочетающих классические уравнения с нейросетевыми алгоритмами. Однако ключевой задачей остаётся

обеспечение ответственного использования математических моделей, предотвращающего необратимые вмешательства в природные процессы.

Важно помнить, что любая модель - это упрощение реальности. Например, она не учитывает этические аспекты вмешательства в экосистемы. Так, уничтожение инвазивных видов ради баланса может привести к непредвиденным последствиям для местных сообществ. Поэтому использование математических инструментов должно сопровождаться междисциплинарным подходом и осторожностью [7, 9].

В будущем интеграция модели с технологиями искусственного интеллекта откроет новые горизонты. Уже сегодня алгоритмы машинного обучения помогают находить скрытые паттерны в данных, улучшая точность прогнозов. Это делает модель Лотки-Вольтерры не просто историческим наследием, а живым инструментом для решения глобальных вызовов нашего времени.

#### Библиографический список

1. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: МЦНМО, 2012. – 367 с.
2. Базыкин А.Д. Нелинейная динамика взаимодействующих популяций. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. – 436 с.
3. Братусь А.С., Мещерин А.С., Новожилов А.С. Математические модели взаимодействия загрязнения с окружающей средой // Вестник МГУ. Сер. Вычислительная математика и кибернетика. – 2001. – №3. – С. 45-52.
4. Братусь А.С., Новожилов А.С., Платонов А.П. Динамические системы и модели биологии. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010. – 512 с.
5. Зорич В.А. Математический анализ. Часть I. – М.: МЦНМО, 2012. – 564 с.
6. Козырев С.В. Модель типа Лотки-Вольтерры с мутациями и порождающие соревновательные сети // Теоретическая и математическая физика. – 2024. – Т. 218, № 2. – С. 320-329.
7. Малков С.Ю. Социальная самоорганизация и исторический процесс. – М.: УРСС, 2009. – 287 с.
8. Неймарк Ю.И. Математические модели в естествознании и технике. – Н. Новгород: Изд-во Нижегородского университета, 2004. – 398 с.
9. Пых Ю.А. Обобщенные системы Лотки-Вольтерра: теория и приложения. – СПб.: СПбГИПСР, 2017. – 224 с.
10. Соколов С.В. Модели динамики популяций: учебное пособие. – СПб.: Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2018. – 176 с.
11. Lotka A.J. Elements of Physical Biology. – Williams & Wilkins, 1925. – 460 p.

12. Volterra V. Variations and Fluctuations of the Number of Individuals in Animal Species Living Together // Journal du Conseil. – 1926. – Vol. 3. – P. 1-51.  
13. Gurney W.S.C., Nisbet R.M. Ecological Dynamics. – Oxford University Press, 1998. – 352 p.

### IN SEARCH OF BALANCE: THE LOTKA-VOLTERRA MODEL IN BIOSYSTEM RESEARCH

**O.A. Kishkinova**, *Senior Lecturer*

**N.A. Verezubova**, *Candidate of Economic Sciences, Associate Professor*

**N.M. Tomilova**, *Student*

**Moscow State Academy of Veterinary Medicine and Biotechnology – MVA named after K.I. Skryabin  
(Russia, Moscow)**

**Abstract.** *The Lotka-Volterra model serves as a fundamental tool for analyzing population dynamics in ecosystems and biotechnological processes. The article discusses in detail the principles of operation of this mathematical system, its practical application in biotechnology, as well as its role in the study of interspecific interactions and optimization of industrial processes. The article analyzes the possibilities of expanding the classical model to describe multi-species systems and complex food chains, predict epidemiological processes by adapting the model to analyze the spread of infectious diseases and develop strategies to combat antibiotic resistance. Its main advantages are considered: adaptability, accuracy, interdisciplinarity. Special attention is paid to modern modifications of the model when intervening in natural ecosystems, expanding its applicability in the context of global environmental challenges. It is proved that the Lotka-Volterra model is not just a historical legacy, but a living fundamental instrument.*

**Keywords:** *Lotka-Volterra model, biotechnology, ecosystems, mathematical modeling, population interactions.*