

## ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНОГО ВОЛЬТЕРРОВА ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С НЕГЛАДКИМИ СРЕЗАННЫМИ ФУНКЦИЯМИ

А.М. Байгесеков, канд. физ.-мат. наук, и.о. доцента

Сулюктинский гуманитарно-экономический институт Баткенского государственного университета

(Кыргызстан, г. Сулюкта)

DOI:10.24412/2500-1000-2025-2-3-105-111

**Аннотация.** Устанавливаются достаточные условия асимптотической устойчивости решений линейного интегро-дифференциального уравнения третьего порядка типа Вольтерра на полуоси. Для этого сначала заданное уравнение с помощью нестандартной замены сводится к эквивалентной системе, состоящей из одного дифференциального уравнения второго порядка и одного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения первого порядка. Затем к этой системе развиваются метод возведения уравнений в квадрат и метод срезывающих функций, и в отличие от ранее проведенных исследований, делаются такие преобразования, которые охватывают случай, когда срезанные слагаемые ядер и свободных членов могут быть недифференцируемы в дискретных точках полуоси. После применения метода об интегральном неравенстве используется лемма Люстерника-Соболева. Строится иллюстративный пример.

**Ключевые слова:** интегро-дифференциальное уравнение третьего порядка, нестандартное сведение к системе, возведение уравнений в квадрат, срезывающие функции, негладкость срезанных функций, стремление к нулю решений, стремление к нулю производных решений, асимптотическая устойчивость, лемма Люстерника-Соболева.

Все фигурирующие функции являются непрерывными и соотношения имеют место при  $t \geq t_0, t \geq \tau \geq t_0$ ; ИДУ-интегро-дифференциальное уравнение; под асимптотической устойчивостью решений линейного ИДУ третьего порядка понимается стремление к нулю при  $t \rightarrow \infty$  всех решений и их первых и вторых производных.

### Постановка задачи

Пусть [1]:  $0 < W(t)$  - некоторая весовая функция;  $K(t, \tau) \equiv (W(t))^{-1} Q_2(t, \tau) W(\tau)$ ,

$$F(t) \equiv f(t) (W(t))^{-1};$$

Также предположим [2]:

$$K(t, \tau) \equiv \sum_{i=1}^n K_i(t, \tau), \quad (K)$$

$$F(t) \equiv \sum_{i=1}^n F_i(t), \quad (F)$$

$\psi_i(t)$  ( $i = 1 \dots n$ ) - некоторые срезывающие функции,

$$R_i(t, \tau) \equiv K_i(t, \tau) (\psi_i(t) \psi_i(\tau))^{-1}, \quad E_i(t) \equiv F_i(t) (\psi_i(t))^{-1} \quad (i = 1 \dots n).$$

Функции  $R_i(t, \tau)$ ,  $E_i(t)$  ( $i = 1 \dots n$ ) называются срезанными.

**Задача.** Установить достаточные условия асимптотической устойчивости решений линейного ИДУ третьего порядка типа Вольтерра вида

$$x'''(t) + \sum_{k=0}^2 \left[ a_k(t)x^k(t) + \int_{t_0}^t Q_k(t, \tau)x^k(\tau)d\tau \right] = f(t), t \geq t_0 \quad (1)$$

в случае, когда срезанные функции  $R_i(t, \tau)$ ,  $E_i(t)$  ( $i = 1 \dots n$ ) могут быть недифференцируемыми в некоторых точках полуоси  $t \geq t_0$ .

Отметим, что такая задача решается впервые.

#### Решение задачи

Сначала в ИДУ (1) аналогично [1] сделаем следующую нестандартную замену:

$$x''(t) + px'(t) + qx(t) = W(t)y(t), \quad (2)$$

где  $p, q$ -некоторые вспомогательные параметры,  $y(t)$  - новая неизвестная функция. Тогда ИДУ (1) сводится к следующей эквивалентной системе:

$$\begin{cases} x''(t) + px'(t) + qx(t) = W(t)y(t), \\ y'(t) + b_2(t)y(t) + b_1(t)x'(t) + b_0(t)x(t) + \int_{t_0}^t [P_0(t, \tau)x(\tau) + P_1(t, \tau)x'(\tau) + K(t, \tau)y(\tau)]d\tau = F(t), \end{cases} \quad (3) \text{ где}$$

$$\begin{aligned} b_2(t) &\equiv a_2(t) - p + W'(t)(W(t))^{-1}, \\ b_1(t) &\equiv (W(t))^{-1} [a_1(t) - pa_2(t) + p^2 - q], \\ b_0(t) &\equiv (W(t))^{-1} [a_0(t) - qa_2(t) + pq], \\ P_0(t, \tau) &\equiv (W(t))^{-1} [Q_0(t, \tau) - qQ_2(t, \tau)], \\ P_1(t, \tau) &\equiv (W(t))^{-1} [Q_1(t, \tau) - pQ_2(t, \tau)]. \end{aligned}$$

Следуя идее метода из статьи [3], первое уравнение системы (3) возводим в квадрат [2, с.28], а второе уравнение – умножаем на  $y(t)$  [4, с.194-217], затем сложим полученные соотношения, интегрируем в пределах от  $t_0$  до

$t$ , при этом аналогично [2] вводим условия  $(K), (f)$ , функции  $\psi_i(t)$ ,  $R_i(t, \tau)$ ,  $E_i(t)$  ( $i = 1 \dots n$ ). В результате получаем следующее тождество:

$$\begin{aligned} &\int_{t_0}^t \left[ (x''(s))^2 + (p^2 - 2q)(x'(s))^2 + q^2(x(s))^2 \right] ds + p(x'(t))^2 + 2qx(t)x'(t) + pq(x(t))^2 + (y(t))^2 + \\ &+ 2 \int_{t_0}^t b_2(s)(y(s))^2 ds + 2 \sum_{i=1}^n \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s R_i(s, \tau) z_i(\tau) z_i(s) d\tau ds \equiv c_* + \int_{t_0}^t (W(s))^2 (y(s))^2 ds + \\ &+ 2 \sum_{i=1}^n \int_{t_0}^t E_i(s) z_i(s) ds - 2 \int_{t_0}^t y(s) \left\{ b_1(s)x'(s) + b_0(s)x(s) + \int_{t_0}^s [P_0(s, \tau)x(\tau) + P_1(s, \tau)x'(\tau)] d\tau \right\} ds, \quad (4) \text{ где} \\ &z_i(t) \equiv \psi_i(t)y(t), c_* = p(x'(t_0))^2 + 2qx(t_0)x'(t_0) + pq(x(t_0))^2 + (y(t_0))^2. \end{aligned}$$

Теперь для тождества (4) будем делать следующие преобразования, аналогичные преобразованиям 3) – 5) из [5].

Пусть

$$b_2(t) = \sum_{i=1}^n b_{2i}(t), \quad (b_2)$$

$$R_i(t, \tau) = R_{i1}(t, \tau) R_{i2}(t, \tau) \quad (i=1..n), \quad (R_i)$$

$$E_i(t) = E_{i1}(t) E_{i2}(t) \quad (i=1..n). \quad (E_i)$$

Тогда аналогично соотношению (3) [5] имеем:

$$2 \int_{t_0}^t b_2(s) (y(s))^2 ds = 2 \int_{t_0}^t \sum_{i=1}^n b_{2i}(s) (\psi_i(s))^{-2} (\psi_i(s) y(s))^2 ds = 2 \sum_{i=1}^n \int_{t_0}^t \Delta_i(s) (z_i(s))^2 ds, \quad (5)$$

где  $\Delta_i(t) \equiv b_{2i}(t) (\psi_i(t))^{-2} \quad (i=1..n)$ .

Пусть  $\Delta_i(t) > 0 \quad (i=1..n)$ . Используя широко известное неравенство  $2\alpha\beta \leq \alpha^2 + \beta^2$ , вводя функции  $\Delta_i(t)$  и делая интегрирование по частям, аналогично (4) из [5], получаем соотношение:

$$\begin{aligned} & 2 \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s R_{i1}(s, \tau) R_{i2}(s, \tau) z_i(\tau) z_i(s) d\tau ds \leq \\ & \leq \int_{t_0}^t \left[ \int_{t_0}^s (R_{i2}(s, \tau))^2 d\tau \right] (z_i(s))^2 ds + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s \frac{(R_{i1}(s, \tau))^2}{\Delta_i(\tau)} \Delta_i(\tau) (z_i(\tau))^2 d\tau ds = \\ & \left[ \left( \int_{t_0}^{\tau} \Delta_i(\eta) (z_i(\eta))^2 d\eta \right)'_{\tau} = \Delta_i(\tau) (z_i(\tau))^2 \right] \\ & = \int_{t_0}^t \left[ \int_{t_0}^s (R_{i2}(s, \tau))^2 d\tau \right] (z_i(s))^2 ds + \int_{t_0}^t \left\{ \frac{(R_{i1}(s, s))^2}{\Delta_i(s)} \left( \int_{t_0}^s \Delta_i(\eta) (z_i(\eta))^2 d\eta \right) - \right. \\ & \left. - \int_{t_0}^s \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \frac{(R_{i1}(s, \tau))^2}{\Delta_i(\tau)} \right] \left( \int_{t_0}^{\tau} \Delta_i(\eta) (z_i(\eta))^2 d\eta \right) d\tau \right\} ds \quad (i=1..n). \quad (6) \end{aligned}$$

Далее аналогично соотношению (5) из [5] имеем:

$$2 \int_{t_0}^t E_{i1}(s) E_{i2}(s) z_i(s) ds \leq \int_{t_0}^t (E_{i2}(s))^2 (z_i(s))^2 ds + \int_{t_0}^t (E_{i1}(s))^2 ds \quad (i=1..n). \quad (7)$$

С учетом соотношений (5) - (7) из тождества (4) приходим к следующему неравенству:

$$\begin{aligned} u(t) & \equiv \int_{t_0}^t \left[ (x''(s))^2 + (p^2 - 2q)(x'(s))^2 + q^2(x(s))^2 \right] ds + p(x'(t))^2 + \\ & + 2qx(t)x'(t) + pq(x(t))^2 + (y(t))^2 + \sum_{i=1}^n \int_{t_0}^t D_i(s) (z_i(s))^2 ds + \\ & + \sum_{i=1}^n \int_{t_0}^t \Delta_i(s) (z_i(s))^2 ds \leq c_* + \sum_{i=1}^n \int_{t_0}^t (E_{i1}(s))^2 ds + \int_{t_0}^t (W(s))^2 (y(s))^2 ds + \\ & + \sum_{i=1}^n \int_{t_0}^t \left\{ \frac{(R_{i1}(s, s))^2}{\Delta_i(s)} \left( \int_{t_0}^s \Delta_i(\eta) (z_i(\eta))^2 d\eta \right) - \int_{t_0}^s \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \frac{(R_{i1}(s, \tau))^2}{\Delta_i(\tau)} \right] \left( \int_{t_0}^{\tau} \Delta_i(\eta) (z_i(\eta))^2 d\eta \right) d\tau \right\} ds - \\ & - 2 \int_{t_0}^t y(s) \left\{ b_1(s) x'(s) + b_0(s) x(s) + \int_{t_0}^s [P_0(s, \tau) x(\tau) + P_1(s, \tau) x'(\tau)] d\tau \right\} ds, \quad (8) \end{aligned}$$

где

$$D_i(t) \equiv \Delta_i(t) - \int_{t_0}^t (R_{i2}(t, \tau))^2 d\tau - (E_{i2}(t))^2 \quad (i=1 \dots n).$$

Переходя из неравенства (8) к интегральному неравенству применяя лемму 1 [6] об интегральном неравенстве, аналогично теореме из [3] доказывается следующая

**Теорема.** Пусть 1)  $p > 0, q > 0, W(t) > 0$ , выполняются условия  $(K), (F), (b_2), (R_i), (E_i)$ ; 2)  $p^2 - 2q > 0$ ; 3)  $D_i(t) \geq 0, \Delta_i(t) > 0$  ( $i=1 \dots n$ );

$$4) (W(t))^2 + (E_{i1}(t))^2 + \frac{(R_{i1}(t, t))^2}{\Delta_i(t)} + \int_{t_0}^t \left| \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \frac{(R_{i1}(t, \tau))^2}{\Delta_i(\tau)} \right] \right| d\tau + \\ + (b_k(t))^2 + \left[ \int_{t_0}^t (P_k(t, \tau))^2 d\tau \right]^{\frac{1}{2}} \in L^1(J, R_+ \setminus \{0\}) \quad (i=1 \dots n; k=0, 1).$$

Тогда для любого решения  $(x(t), y(t))$  системы (3) справедливы утверждения:

$$x^{(k)}(t) \in L^2(J, R) \quad (k=0, 1, 2), \quad (9)$$

$$y(t) = O(1). \quad (10)$$

Пусть, кроме того, 5)  $W(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ . Тогда любое решение линейного вольтеррова ИДУ третьего порядка (1) асимптотически устойчиво.

**Доказательство.** В силу условий 1), 2) теоремы получаем, что  $p(x'(t))^2 + 2qx(t)x'(t) + pq(x(t))^2 \geq 0$ , так как это неравенство выполняется при любых  $x, x'$ , если дискриминант  $q^2 - p \cdot pq < 0$ , что

равносильно  $p^2 - q > 0$ . В силу  $p > 0, q > 0$  из  $p^2 - 2q > 0$  имеем, что  $p^2 - q > 0$ . Следовательно, при выполнении условий 1)-3) теоремы  $u(t) \geq 0$ .

Далее для любых чисел  $\varepsilon_k \in (0, 1)$ , т.е. при  $0 < \varepsilon_k < 1$  ( $k=0, 1$ ), аналогично [3] имеем следующие 2 соотношения:

$$2 \int_{t_0}^t b_0(s)x(s)y(s)ds = 2 \int_{t_0}^t q\sqrt{\varepsilon_0}x(s) \frac{b_0(s)}{q\sqrt{\varepsilon_0}} y(s)ds \leq \varepsilon_0 q^2 \int_{t_0}^t (x(s))^2 ds + \frac{1}{\varepsilon_0^2 q^2} \int_{t_0}^t (b_0(s))^2 ds, \quad (11)$$

$$2 \int_{t_0}^t b_1(s)x'(s)y(s)ds = 2 \int_{t_0}^t \sqrt{p^2 - 2q} \sqrt{\varepsilon_1} x'(s) \frac{b_1(s)}{\sqrt{p^2 - 2q} \sqrt{\varepsilon_1}} y(s)ds \leq \\ \leq \varepsilon_1 (p^2 - 2q) \int_{t_0}^t (x'(s))^2 ds + \frac{1}{\varepsilon_1 (p^2 - 2q)} = 2 \int_{t_0}^t (b_1(s))^2 (y(s))^2 ds; \quad (12)$$

Применяя неравенства Коши-Буняковского, аналогично также из [3], получаем, что

$$2 \int_{t_0}^t |y(s)| \left[ \int_{t_0}^s |P_k(s, \tau)x^{(k)}(\tau)| d\tau \right] ds \leq 2 \int_{t_0}^t \left[ \int_{t_0}^s (P_k(s, \tau))^2 d\tau \right]^{\frac{1}{2}} \left[ \int_{t_0}^s (x^{(k)}(\tau))^2 d\tau \right]^{\frac{1}{2}} |y(s)| ds \quad (k=0, 1). \quad (13)$$

Так

как

$$u(t) \geq \int_{t_0}^t \left[ (x''(s))^2 + (p^2 - 2q)(x'(s))^2 + q^2(x(s))^2 \right] ds + (y(t))^2 + \sum_{i=1}^n \int_{t_0}^t \Delta_i(s)(z_i(s))^2 ds, \quad \text{то обозначая:}$$

значая:

$$U(t) \equiv \int_{t_0}^t \left[ (x''(s))^2 + (1 - \varepsilon_1)(p^2 - 2q)(x'(s))^2 + (1 - \varepsilon_0)(x(s))^2 \right] ds + (y(t))^2 + \sum_{i=1}^n \int_{t_0}^t \Delta_i(s)(z_i(s))^2 ds \text{ и}$$

учитывая (11)-(14), также условие 4), из неравенства (8), будем иметь следующее интегральное неравенство:

$$U(t) \leq c_{**} + \int_{t_0}^t \left\{ (W(s))^2 + \sum_{i=1}^n \frac{(R_{i1}(s,s))^2}{\Delta_i(s)} + \frac{1}{\varepsilon_0 q^2} (b_0(s))^2 + \frac{1}{\varepsilon_1 (p^2 - 2q)} (b_1(s))^2 + q^{-1} \left[ \int_{t_0}^s (P_0(s,\tau))^2 d\tau \right]^{\frac{1}{2}} + (p^2 - 2q)^{-\frac{1}{2}} \left[ \int_{t_0}^s (P_1(s,\tau))^2 d\tau \right]^{\frac{1}{2}} \right\} U(s) ds + \sum_{i=1}^n \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s \left| \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \frac{(R_i(s,\tau))^2}{\Delta_i(\tau)} \right] \right| U(\tau) d\tau ds, \quad (15)$$

Где

$$c_{**} = c_* + \sum_{i=1}^n \int_{t_0}^{\infty} (E_{i1}(s))^2 ds < \infty.$$

Применяя к интегральному неравенству (15) лемму 1 из [6] и с учетом условия 4) теоремы, получаем оценку:

$$U(t) \leq c_{***}, \quad (16)$$

где

$$c_{***} = c_{**} \exp \left( \int_{t_0}^{\infty} \left\{ (W(s))^2 + \sum_{i=1}^n \left[ \frac{(R_{i1}(s,s))^2}{\Delta_i(s)} + \int_{t_0}^s \left| \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \frac{(R_i(s,\tau))^2}{\Delta_i(\tau)} \right] \right| d\tau \right] + \frac{1}{\varepsilon_0 q^2} (b_0(s))^2 + \frac{1}{\varepsilon_1 (p^2 - 2q)} (b_1(s))^2 + q^{-1} \left[ \int_{t_0}^s (P_0(s,\tau))^2 d\tau \right]^{\frac{1}{2}} + (p^2 - 2q)^{-\frac{1}{2}} \left[ \int_{t_0}^s (P_1(s,\tau))^2 d\tau \right]^{\frac{1}{2}} \right\} ds \right) < \infty.$$

Из оценки (16) с учетом обозначения (14) вытекают утверждения (9), (10) теоремы.

Применяя к (9) лемму Люстерника-Соболева [7, с. 393-394;3]:

«Если  $x^{(k)}(t) \in L^2(J, R)$  ( $k = 0, 1$ ), то  $x(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ », установим, что  $x^{(k)}(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$  ( $k = 0, 1$ ). Учет условия 5), и (10) дает  $x''(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ . Следовательно, для любого решения  $x(t)$  ИДУ (1) выполняются утверждения:  $x^{(k)}(t) \rightarrow 0$  ( $k = 0, 1, 2$ ) при  $t \rightarrow \infty$ , что означает асимптотическую устойчивость любого решения ИДУ третьего порядка (1). Теорема доказана.

Приведем простейший иллюстративный

**Пример.** Для ИДУ третьего порядка (1) с  $a_2(t) \equiv 3e^{4t} + |\sin t|^{\frac{1}{3}} + 5$ ,  
 $a_1(t) \equiv 9e^{4t} + 3|\sin t|^{\frac{1}{3}} + 8 - \frac{19}{t+1}$ ,  $a_0(t) \equiv 6e^{4t} + 2|\sin t|^{\frac{1}{3}} + 4 - \frac{31 \sin 2t}{t+5}$ ,  
 $Q_0(t, \tau) \equiv 2Q_2(t, \tau) + \frac{e^{-2t} \sin \tau}{(t+\tau+3)^4}$ ,  $Q_1(t, \tau) \equiv 3Q_2(t, \tau) - \frac{e^{-2t}}{(t+2\tau+10)^3}$ , где  $Q_2(t, \tau) \equiv \frac{(\cos t)^{\frac{1}{5}} e^{4\tau}}{(t+\tau+7)^3}$ ,

$f(t) \equiv \frac{(\sin 9t)^{\frac{1}{7}}}{t+3}$ ,  $t_0 = 0$  выполняются все условия теоремы при  $p = 3, q = 2, W(t) \equiv e^{-2t}$ , здесь

$$b_2(t) \equiv 3e^{4t} + |\sin t|^{\frac{1}{3}}, \quad b_1(t) \equiv -\frac{19}{t+1}, \quad b_0(t) \equiv -\frac{31\sin 2t}{t+5},$$

$$P_0(t, \tau) \equiv \frac{\sin \tau}{(t+\tau+3)^4}, \quad P_1(t, \tau) \equiv -\frac{1}{(t+2\tau+10)^3}, \quad K(t, \tau) \equiv \frac{e^{2t+2\tau}(\cos t)^{\frac{1}{5}}}{(t+\tau+7)^3}, \quad F(t) \equiv \frac{e^{2t}(\sin 9t)^{\frac{1}{7}}}{t+3},$$

$$n = 1, \quad \psi_1(t) \equiv e^{2t}, \quad R_1(t, \tau) \equiv \frac{(\cos t)^{\frac{1}{5}}}{(t+\tau+7)^3}, \quad E_1(t) \equiv \frac{(\sin 9t)^{\frac{1}{7}}}{t+3}, \quad R_{11}(t, \tau) \equiv \frac{(\cos t)^{\frac{1}{5}}}{(t+\tau+7)^2},$$

$$R_{12}(t, \tau) \equiv \frac{1}{t+\tau+7}, \quad E_{11}(t) \equiv \frac{1}{t+3}, \quad E_{12}(t) \equiv (\sin 9t)^{\frac{1}{7}}, \quad D_1(t) \geq \frac{2t+13}{t+7}, \quad \Delta_1(t) \equiv 3 + e^{-4t} |\sin t|^{\frac{1}{3}}.$$

### Заключение

Таким образом, нами найден класс ИДУ третьего порядка типа Вольтерра вида (1), для которого решается выше сформулированная нами задача.

### Библиографический список

1. Искандаров С. О новом варианте метода нестандартного сведения к системе для линейного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения третьего порядка // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. – Бишкек: Илим, 2007. – Вып. 37. – С. 24-29.

2. Искандаров С. Метод весовых и срезающих функций и асимптотические свойства решений интегро-дифференциальных и интегральных уравнений типа Вольтерра. – Бишкек: Илим, 2002. – 216 с.

3. Искандаров С. Об одном нестандартном методе исследования асимптотической устойчивости решений линейного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения четвертого порядка // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. – Бишкек: Илим, 2012. – Вып. 44. – С. 44-51.

4. Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование: Пер. с фр. / Под ред. Ю.М. Свиричева. – М.: Наука, 1976. – 288 с.

5. Искандаров С. О развитии метода весовых и срезающих функций для линейного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения первого порядка // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. – Бишкек: Илим, 2004. – Вып. 33. – С. 58-61.

6. Вель Ю.А., Пахыров З. Достаточные признаки ограниченности решений линейных интегро-дифференциальных уравнений // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям в Киргизии. – Фрунзе: Илим, 1973. – Вып. 9. – С. 68-103.

7. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа. – М.: Наука, 1965. – 520 с.

---

**ON THE ASYMPTOTIC STABILITY OF SOLUTIONS OF A LINEAR VOLTERRA  
INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION OF THE THIRD ORDER WITH NONSMOOTH  
CUT FUNCTIONS**

**A.M. Baigesekov**, *Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Acting Associate Professor*  
**Sulukta Humanitarian and Economic Institute of Batken State University**  
(Kyrgyzstan, Sulukta)

***Abstract.** Sufficient conditions for the asymptotic stability of solutions to a third-order linear integro-differential equation of Volterra type on the half-axis are established. To do this, first the given equation, using a non-standard substitution, is reduced to an equivalent system consisting of one second-order differential equation and one first-order Volterra integro-differential equation. Then the method of squaring equations and the method of cutting functions are developed for this system, and in contrast to previous studies, transformations are made that cover the case when the cut terms of the kernels and free terms can be non-differentiable at discrete points of the semi-axis. After applying the integral inequality method, the Lyusternik-Sobolev lemma is used. An illustrative example is constructed.*

***Keywords:** third order integro-differential equation, non-standard reduction to the system, squaring equations, cutting functions, non-smoothness of truncated functions, the desire for zero solutions, the desire for zero derivative solutions, asymptotic stability, Lyusternik-Sobolev lemma.*