

## ИССЛЕДОВАНИЕ ДИСКРЕТНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ УОЛША-АДАМАРА В ОБРАБОТКЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

А.В. Ермакова, аспирант

П.О. Макаров, аспирант

Московский технический университет связи и информатики  
(Россия, г. Москва)

DOI:10.24412/2500-1000-2024-1-3-97-101

**Аннотация.** В данной статье рассматриваются исследования дискретных преобразований Уолша-Адамара и их применение в обработке результатов. Дискретные преобразования Уолша-Адамара – это методы, которые позволяют анализировать и изменять данные в дискретной форме. Статья начинается с обзора основных принципов дискретных преобразований Уолша-Адамара, включая их математическую формулировку и основные свойства. Затем рассматриваются методы применения этих преобразований в задачах обработки результатов, таких как сжатие данных, фильтрация шума и извлечение сжатого сигнала. Также в статье представлены численные эксперименты, проведенные с использованием дискретных преобразований Уолша-Адамара, чтобы продемонстрировать их эффективность в различных сценариях обработки результатов. Результаты экспериментов подтверждают значительное улучшение в качестве обработки данных при использовании этих преобразований.

**Ключевые слова:** дискретные преобразования Уолша-Адамара, обработка результатов, сжатие данных.

### 1. Преобразование Уолша-Адамара

Преобразование Уолша-Адамара – это ортогональное преобразование, которое разделяет сигнал на набор ортогональных прямоугольных волновых форм, называемых функциями Уолша. Преобразование

не имеет множителей и является вещественным, поскольку амплитуда функций Уолша имеет только два значения, +1 или -1. Простейшей матрицей Адамара является матрица второго порядка, имеющая вид:

$$H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Пары дискретного преобразования Уолша-Адамара в показательной форме показано в таблице 1.

Таблица 1. Дискретные преобразования Уолша-Адамара в показательной форме

Прямого преобразования	Обратного преобразования	Преобразования в матричном виде
$b(k) = \sum_{n=0}^{N-1} s(n)(-1)^{kn},$ $k = 0, 1, \dots, N-1$	$s(n) = N^{-1} \sum_{k=0}^{N-1} b(k)(-1)^{kn},$ $n = 0, 1, \dots, N-1$	$B = HS$ $s = N^{-1}HB$

Преобразование Уолша-Адамара может использоваться во многих различных анализах, таких как анализ спектра мощности, фильтрация, обработка речевых и медицинских сигналов, мультиплексирование и

кодирование в связи, определение характеристик нелинейных сигналов, решение нелинейных дифференциальных уравнений, логическое проектирование и анализ.

### 2. Базис Уолша-Адамара

В матрице Уолша-Адамара функции Уолша располагаются в таком порядке, что их отсчеты образуют матрицу Адамара. Это означает, что систему Уолша-Адамара можно синтезировать, основываясь на известных свойствах этих матриц. Матрица Адамара второго порядка представлена в формуле (1).

$$W = e^{-j\left(\frac{2\pi}{2}\right)} = e^{-j\pi} = -1 \quad (2)$$

то матрицу  $H_2$  можно записать в виде

$$H_2 = \begin{bmatrix} W^0 & W^0 \\ W^0 & W^1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

При  $N = 2^2 = 4$  элементами матрицы  $H_4$  Адамара станут матрицы  $H_2$ :

$$H_4 = \begin{bmatrix} H_2 & H_2 \\ H_2 & -H_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

Видно, что при увеличении параметра  $n$  на единицу количество строк матрицы Адамара удваивается, так же, как и коли-

Поскольку дискретная частота играет роль номера функции в базисе, а дискретное время – аргумент базисной функции, то для упрощения дальнейших записей введем следующее обозначение для фазовращающего множителя:

чество элементов в каждой из них. Для любого двоично-рационального порядка выполняется следующее равенство

$$H_{2^{n+1}} = \begin{bmatrix} H_{2^n} & H_{2^n} \\ H_{2^n} & -H_{2^n} \end{bmatrix} \quad (5)$$

Используя матрицу (4) синтезируем матрицу Адамара восьмого порядка  $H_8$ :

$$H_8 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

Сформулируем некоторые свойства полученной матрицы: Она является симметричной. Это означает, что все выводы относительно ее строк можно применить и к ее столбцам. Каждая строка этой матрицы, за исключением нулевой, состоит из равного количества нулей и единиц. Нулевая же строка изоморфного отображения матрицы Уолша-Адамара любого порядка состоит из нулей. Равенство всех элементов

первой строки нулям и одинаковое количество нулей и единиц во всех остальных строках являются особенностями не только системы Уолша-Адамара, но и любой другой системы Уолша. Анализируя матрицу приходим к выводу о том, что для первой функции в матрице Адамара любого возможного порядка выполняется равенство:

$$h_1(l) = \begin{cases} +1, & \text{для четных } l \\ -1, & \text{для нечетных } l \end{cases}$$

### 3. Обработка ЭКГ-сигналов

Часто возникает необходимость записывать сигналы электрокардиограммы (ЭКГ) пациентов в разные моменты времени. В результате образуется большой объем данных, который необходимо сохранить для последующего анализа и сравнения. Преобразование Уолша-Адамара подходит для сжатия ЭКГ-сигналов, поскольку обладает такими преимуществами, как:

- 1) Быстрое вычисление коэффициентов Уолша-Адамара;
- 2) Меньший объем памяти, поскольку достаточно хранить только те коэффици-

енты последовательности, которые имеют большие значения;

- 3) Быстрое восстановление сигнала.

Ниже приведена оценка ЭКГ-сигнала и соответствующего ему преобразования Уолша-Адамара. При тестировании системы рассматривалась одиночная волна ЭКГ-сигнала, равная 512, который зашумлялся при помощи АБГШ. Так же для обработки данных использовалось быстрое преобразование Уолша-Адамара. Результаты моделирования представлены на рисунке 1.

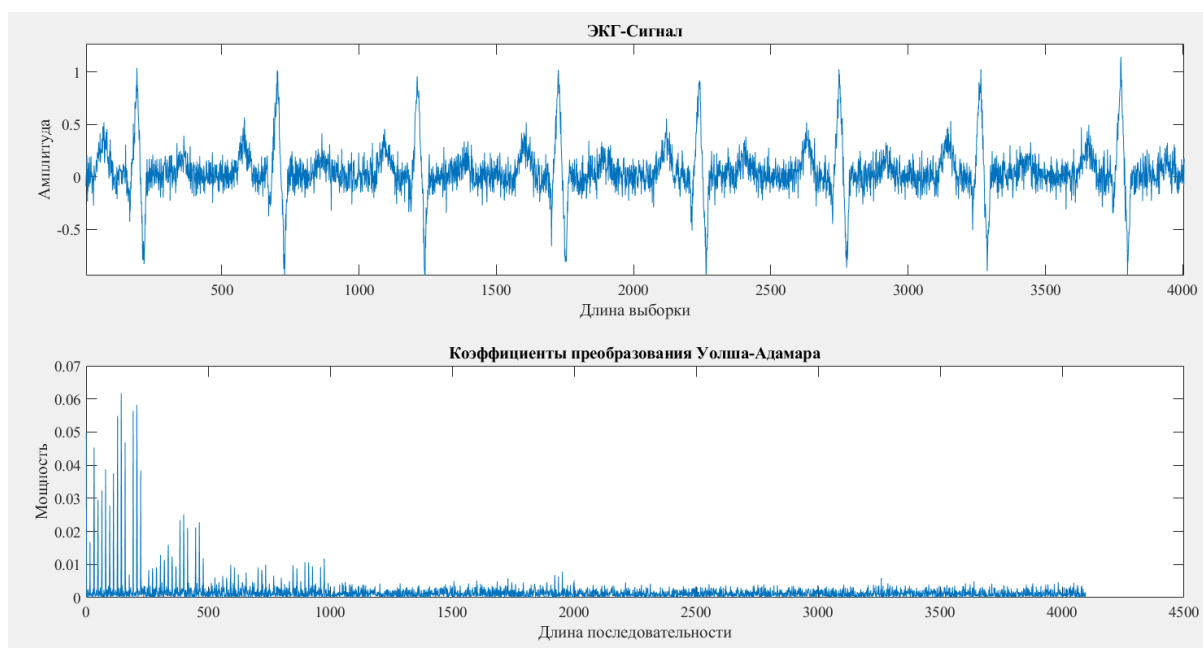


Рис. 1. Исходный ЭКГ-сигнал и полученный сигнал при использовании быстрого преобразования Уолша-Адамара

Как видно из рисунка 1, большая часть энергии сигнала сосредоточена в нижних значениях последовательности. Для целей исследования сохраняются только первые 1024 коэффициента, которые используются для восстановления исходного сигнала.

Усечение коэффициентов более высокой последовательности также способствует подавлению шума. Оригинальный и восстановленные сигналы показаны на рисунке 2.

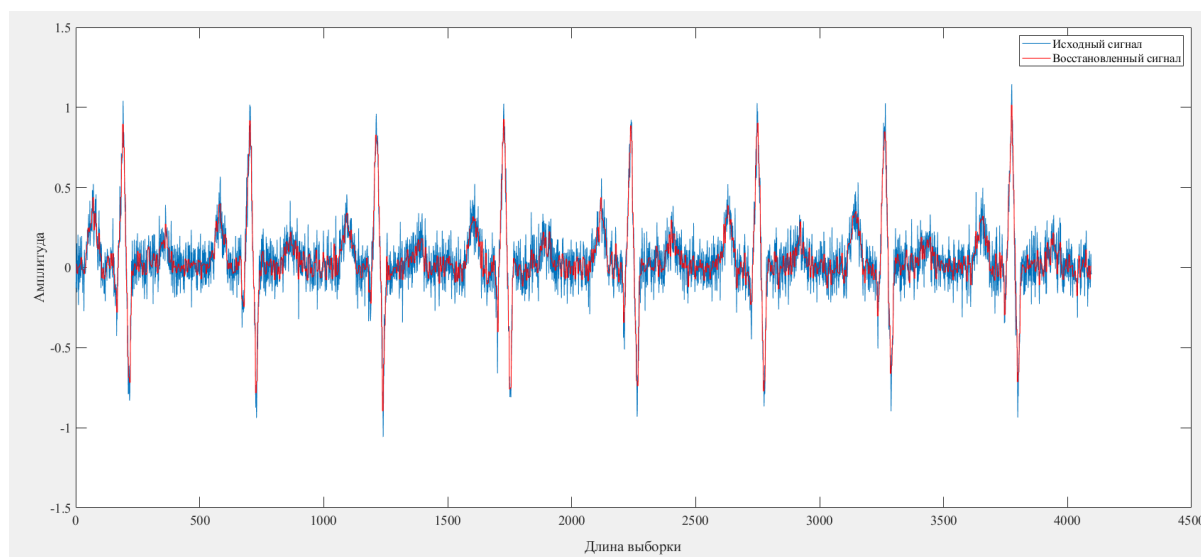


Рис. 2. Оригинальный и восстановленный сигнал

По результатам моделирования видно, что восстановленный сигнал очень близок к исходному сигналу. Чтобы восстановить исходный сигнал, мы сохранили только

первые 1024 коэффициента и длину сигнала ЭКГ, что соответствует степени сжатия примерно 4:1.

#### Библиографический список

1. Скляр Б. Цифровая связь. Теоретические основы и практическое применение. Перевод с англ. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2003. – 1104 с.
2. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. Книга первая. – М.: Сов. радио, 1969. – 752 с.
3. Кловский Д.Д. Передача дискретных сообщений по радиоканалам. – М.: Радио и связь, 1985. – 272 с.
4. Варакин Л.Е. Системы связи с шумоподобными сигналами. – М.: Радио и связь, 1985. – 384 с.
5. Трахтман А.М., Трахтман В.А. Основы теории дискретных сигналов на конечных интервалах. – М.: Советское радио, 1975. – 208 с.

---

**INVESTIGATION OF DISCRETE WALSH-HADAMARD TRANSFORMATIONS IN THE PROCESSING OF RESULTS**

**A.V. Ermakova**, *Postgraduate Student*

**P.O. Makarov**, *Postgraduate Student*

**Moscow Technical University of Communications and Informatics**  
**(Russia, Moscow)**

***Abstract.** This paper presents a study of discrete Walsh-Adamar transforms and their application in result processing. Discrete Walsh-Adamar transformations are methods that allow data to be analyzed and modified in discrete form. This article begins with an overview of the basic principles of discrete Walsh-Adamar transformations, including their mathematical formulation and basic properties. It then discusses methods for applying these transformations to result processing problems such as data compression, noise filtering, and compressed signal extraction. The paper also presents numerical experiments conducted using discrete Walsh-Adamar transforms to demonstrate their effectiveness in various results processing scenarios. The experimental results confirm a significant improvement in the quality of data processing when using these transforms.*

***Keywords:** discrete Walsh-Adamar transforms, result processing, data compression.*