

НАВЕДЕНИЕ УПРАВЛЯЕМОГО ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА ПО МЕТОДУ ТРЕХ ТОЧЕК

Д.П. Бородулин, студент

А.А. Савиных, студент

А.М. Астахов, студент

Е.В. Двойникова, студент

А.А. Кутилин, студент

Балтийский государственный технический университет «ВОЕНМЕХ»

им. Д.Ф. Устинова

(Россия, г. Санкт-Петербург)

DOI:10.24412/2500-1000-2024-1-2-125-136

Аннотация. В статье рассматривается код, написанный для расчета навигации по методу трех точек. Метод предполагает определение трех точек – пункт управления, летательный аппарат (далее ЛА), цель, а также построение системы координат для отслеживания положения летательного аппарата. Преимуществами метода являются его универсальность и возможность использования для наведения разных типов летательных аппаратов. Ограничения связаны с точностью определения координат и влиянием внешних факторов. В процессе работы были обработаны имеющиеся теоретические данные, касающиеся метода, и с помощью программы «MatLab» написан код для реализации метода на практике. В заключение рассматривается оптимизация этого метода и области его применения.

Ключевые слова: баллистика, метод трех точек, наведение, цель, летательный аппарат, угол атаки.

Баллистика – наука, изучающая движение тел в пространстве под действием различных сил, таких как гравитация, сопротивление воздуха и многое другое. Одним из основных методов, используемых в расчете баллистической траектории ЛА, является метод трех точек. В этом методе тело рассматривается как движущееся между тремя точками: начальной точкой – пунктом управления, промежуточной точкой – летательным аппаратом и конечной точкой – целью [2].

Чтобы рассчитать траекторию тела, необходимо знать начальную скорость, угол наклона начальной скорости, расстояние между точками, ускорение свободного падения и другие параметры. Используя эти данные, можно определить время полета тела, максимальную высоту, на кото-

рую оно поднимется, и другие характеристики движения.

Метод трех точек является одним из самых простых и точных методов расчета траектории тела в баллистике. Он широко используется в различных областях, таких как артиллерия, ракетная техника, авиация и космонавтика [1].

Суть метода

Метод трех точек, также известный как «метод совмещения» или «метод накрытия цели» – это способ управления полетом летательного аппарата (ЛА), при котором он постоянно должен находиться на линии, соединяющей точку старта и цель. Это означает, что начальное положение ЛА, его конечное положение (цель) и точка управления (место оператора) должны быть на одной прямой.

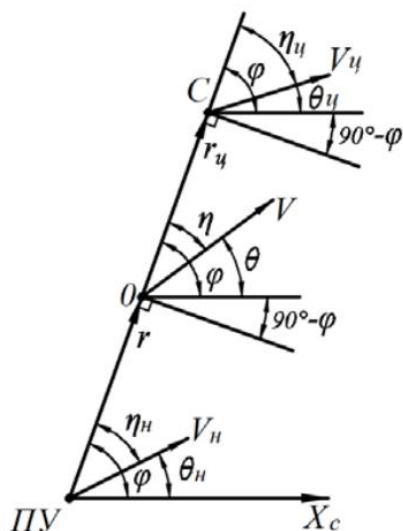


Рис. 1. Схема наведения методом совмещения

В общем случае, положение цели и пункта управления может меняться. Например, при наведении управляемой ракеты “воздух-воздух”. В некоторых случаях пункт управления остается неподвижным, а цель перемещается. Также

возможно, что пункт управления движется, а цель остается неподвижной.

Графическое построение кинематической траектории при наведении методом совмещения представлено на рисунке 2 [3].

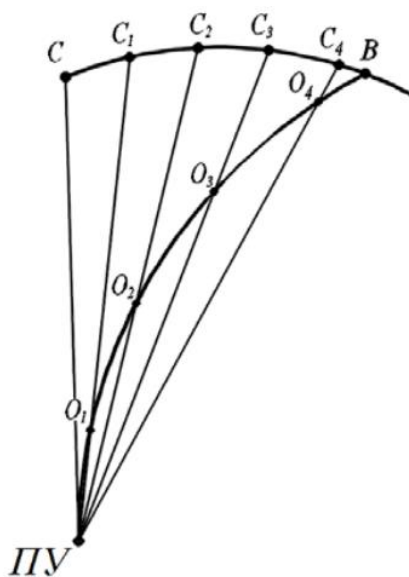


Рис. 2. Кинематическая траектория

Математический расчет

Система дифференциальных уравнений для ЛА:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= V \cos \theta; \\ \frac{dy}{dt} &= V \sin \theta; \\ \frac{dV}{dt} &= \frac{R}{m} - \frac{(c_{x0} + A \cdot \alpha^2) S \rho V^2}{2m} - g \sin \theta; \\ \frac{d\theta}{dt} &= \frac{R \alpha}{mV} + \frac{c_y^\alpha \alpha S \rho V}{2m} - \frac{g \cos \theta}{V}. \end{aligned}$$

Учитывая, что цель летит равномерно и прямолинейно:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= V_{ц}; \\ \frac{dy}{dt} &= 0.\end{aligned}$$

Расчёт времени схода с направляющих t_d и скорость схода с направляющих V_d :

$$\begin{aligned}V_d &= \left[\frac{R}{m_0} - g(\sin \theta_d + f_{тр} \cos \theta_d) \right] t_d; \\ t_d &= \sqrt{\frac{2L_H}{\frac{R}{m_0} - g(\sin \theta_d + f_{тр} \cos \theta_d)}}.\end{aligned}$$

Заданы начальные условия, соответствующие моменту схода ЛА с направляющих:

$$t = t_d; V = V_d; \theta = \theta_d; y_c = L_H \cdot \sin \theta_d; x_c = L_H \cdot \cos \theta_d$$

Заданы начальные условия для цели:

$$t = t_0; V_{ц} = V_{ц0}; \theta_{ц} = 0 \text{ или } \theta_{ц} = \pi; y_{ц} = y_{ц0}; x_{ц} = x_{ц0}$$

Расчет активного участка наведения:

При построении кинематической траектории следует соединить прямыми соответствующие положения цели и пункта управления. Центр масс ЛА все время находится на линии «пункт управления–цель»

Динамическую точность будем характеризовать минимальным расстоянием между ЛА и целью в процессе наведения:

$$r = \sqrt{(x_{ц} - x_c)^2 + (y_{ц} - y_c)^2}.$$

Из угловой скорости линии визирования, находим требуемый угол возвышения ЛА:

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi}{dt} &= \frac{V \cos(\theta + \frac{\pi}{2} - \varphi)}{r} = \frac{V \cos(\theta_{ц} + \frac{\pi}{2} - \varphi)}{r_{ц}}; \\ \theta_{\text{треб}} &= \arccos\left(\frac{V_{ц} \cos(\theta + \frac{\pi}{2} - \varphi)}{V} * \frac{r}{r_{ц}}\right) - \left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right).\end{aligned}$$

Угол атаки – α , с помощью которого можно влиять на угол возвышения находится:

$$\alpha = \frac{\frac{d\theta}{dt} + g \frac{\cos \theta}{V}}{\frac{R}{mV} + \frac{c_y^\alpha S \rho}{2m}}$$

$$\text{где } \frac{d\theta}{dt} = \frac{\theta_{\text{треб}} - \theta}{h}.$$

На угол атаки накладывается ограничение:

$$|\alpha| \leq \alpha_{\text{доп}},$$

где $\alpha_{\text{доп}} = 25^\circ$ - максимально допустимый угол атаки.

Для определения нормальной перегрузки n_y используется соотношение:

$$n_y = \frac{R\alpha + Y}{mg}.$$

В начале наведения, когда $r/r_{\text{ц}} \ll 1$, получаем траекторию наведения, близкую к кривой погони, так как $\eta \approx 0$ и вектор скорости ЛА направлен примерно на цель. В конце наведения, когда $r/r_{\text{ц}} \approx 1$, получается траектория, близкая к траектории параллельного сближения, поскольку в этом случае $\sin \eta \approx \frac{V_{\text{ц}}}{V \sin n_{\text{ц}}}$.

Нормальное ускорение ЛА, наводимого на цель по методу трех точек, зависит:

- от величины пути цели до ЛА; чем больше дальность стрельбы, тем меньше

кривизна кинематической траектории; с приближением цели к ЛА потребные нормальные перегрузки ЛА увеличиваются;

- от скорости цели; с увеличением скорости цели нормальные кинематические ускорения возрастают во всех случаях стрельбы.

Начальные данные, принятые для расчета, приведены в приложении.

Результат для первого случая ($V_{\text{ц}}=70$, $\theta = 0$) приведен на рисунках 3-6.

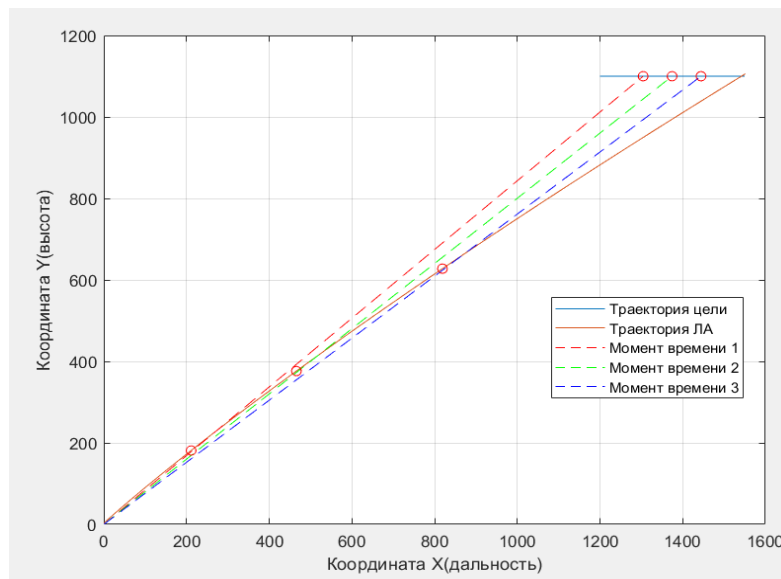


Рис. 3. Зависимость высоты от дальности

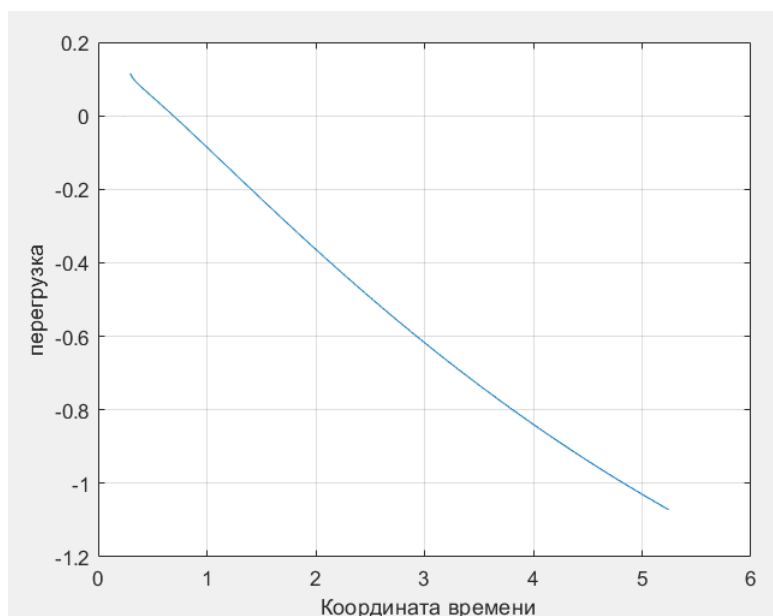


Рис. 4. Зависимость перегрузки от координаты времени

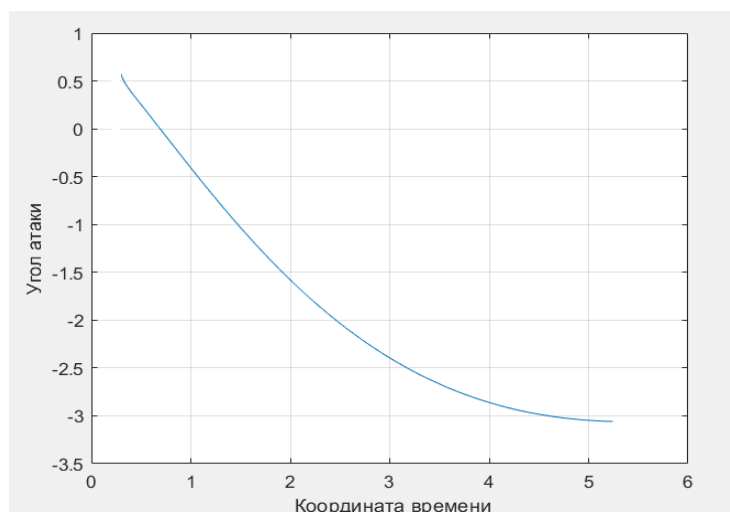


Рис. 5. Зависимость угла атаки от координаты времени

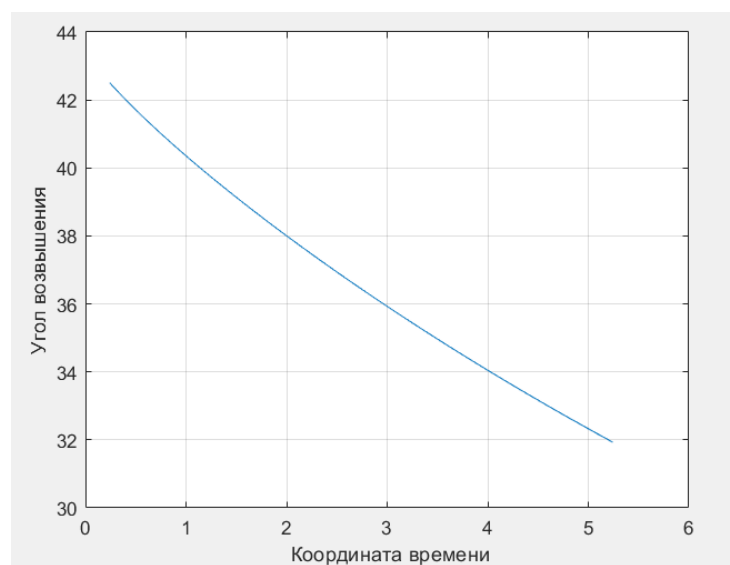
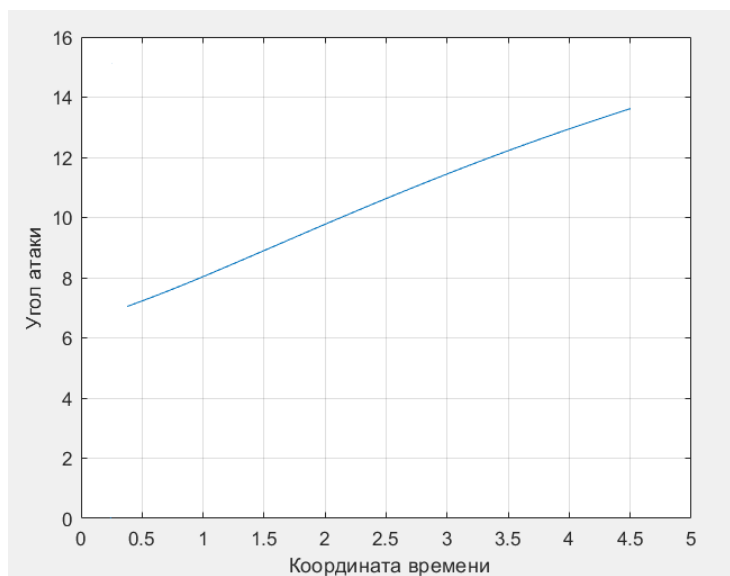
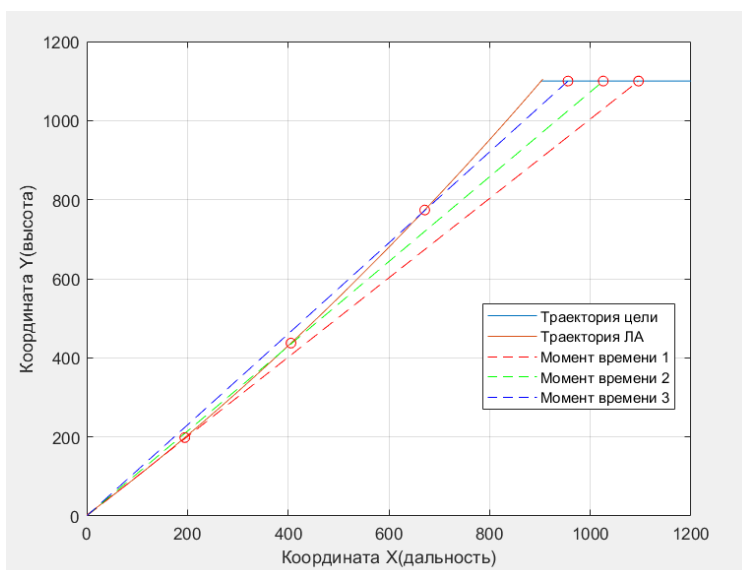


Рис. 6. Зависимость угла возвышения от координаты времени

Результат для второго случая ($V_{ц} = 70, \theta = \pi$) приведен на рисунках 7-10.



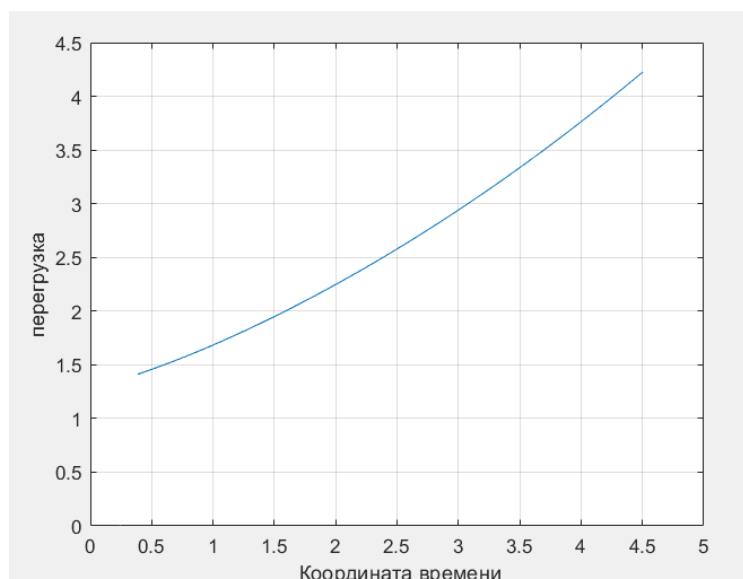


Рис. 9. Зависимость перегрузки от координаты времени

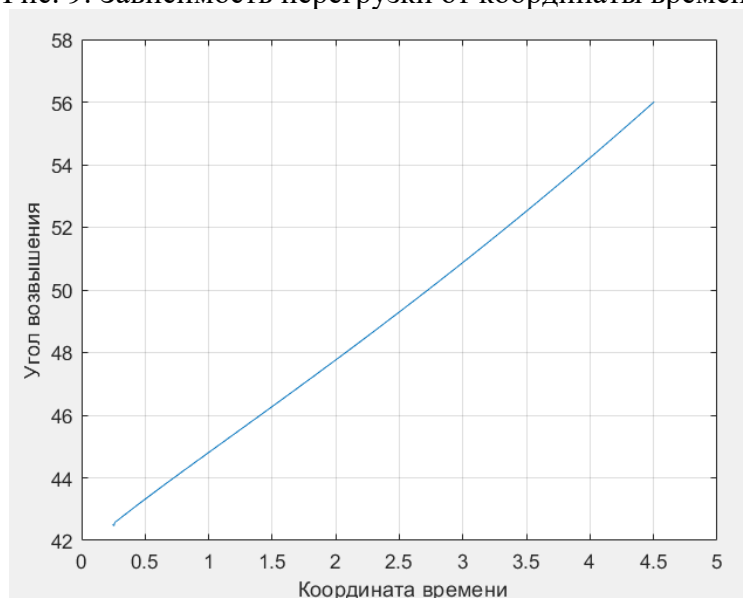


Рис. 10. Зависимость угла возвышения от координаты времени

Вывод

В процессе выполнения данной работы с помощью метода «трёх точек (метода совмещения)» удалось построить траекторию полёта ЛА и цели, с нанесением трёх линии визирования. Для решения дифференциальных уравнений ЛА использовался

метод Рунге-Кутты. В ходе моделирования было выявлено, что с увеличением скорости значительно возрастает как промах, так и перегрузки у ЛА. Однако перегрузка так же зависит от угла атаки ЛА и чем он сильнее изменяется, тем больше перегрузка.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Программа в Matlab для решения получения зависимостей угла возвышения, перегрузки, угла атаки от координаты времени и высоты от дальности

```

clc; clear;
g=9.81;
m0=195;
mk=75;
Q=8.5;
S=0.034;
x_aim(1)=1200;

```

```

y_aim(1)=1100;
v_aim=70;
teta_aim=0;
h=0.01;
cx=0.3;
A=2;
cy=1;
lnn=3;
uuu=2500;
f=0.15;

R=Q*uuu;
m(1)=m0;
y(1)=lnn*sin(pi/2);
x(1)=lnn*cos(pi/2);
alpha(1)=atan(y_aim(1)/x_aim(1));
tetta(1)=alpha(1);
p(1)=1.23*exp(-y(1)/10000);
t(1)=sqrt(2*lnn/(R/m0-g*(sin(tetta(1))+f*cos(tetta(1)))));
v(1)=R/m0-g*(sin(tetta(1))+f*cos(tetta(1)))*t(1);

rr(1)=sqrt(x_aim(1)-x(1))^2+(y_aim(1)-y(1))^2;
r(1)=sqrt(x(1)^2+y(1)^2);
rc(1)=sqrt(x_aim(1)^2+y_aim(1)^2);
tetaTreb(1)=acos(v_aim*cos(teta_aim+pi/2-alpha(1))*r(1)/(v(1)*rc(1)))-(pi/2-alpha(1));
ataka(1)=0;
ataka2(1)=ataka(1)*57.29;
tetta2(1)=tetta(1)*57.29;
ny(1)=(R*ataka(1)+1/2*cy*ataka(1)*p(1)*v(1)^2*S)/(m(1)*g);

t(2)=t(1)+h;
y_aim(2)=y_aim(1);
x_aim(2)=x_aim(1)+v_aim*h;
xn=x(1);
yn=y(1);
vn=v(1);
tetan=tetta(1);
pp=p(1);
mm=m(1);
aaa=ataka(1);
[delx, dely, delv, delteta] = kuku(xn,yn,vn,tetan,mm,pp,aaa);
x(2)=x(1)+delx;
y(2)=y(1)+dely;
v(2)=v(1)+delv;
m(2)=m(1)-Q*t(2);
p(2)=1.23*exp(-y(2)/10000);
tetta(2)=tetta(1)+delteta;
r(2)=sqrt(x(2)^2+y(2)^2);
rc(2)=sqrt(x_aim(2)^2+y_aim(2)^2);
alpha(2)=atan(y_aim(2)/x_aim(2));
rr(2)=sqrt((x_aim(2)-x(2))^2+(y_aim(2)-y(2))^2);
tetaTreb(2)=acos(v_aim*cos(teta_aim+pi/2-alpha(2))*r(2)/(v(2)*rc(2)))-(pi/2-alpha(2));

```



```

    ataka(2)=(tetaTreb(2)-
tetta(2))/h+(g*cos(tetta(2))/v(2))/(R/(m(2)*v(2))+(cy*S*p(2)*v(2))/(2*m(2)));
    if abs(ataka(2))>0.436;
        if ataka(2)>0
            ataka(2)=0.436;
        else
            ataka(2)=-0.436;
        end
    end
    ny(2)=(R*ataka(2)+1/2*cy*ataka(2)*p(2)*v(2)^2*S)/(m(2)*g);
    ataka2(2)=ataka(2)*57.29;
    tetta2(2)=tetta(2)*57.29;
i=2;
while rr(i)<rr(i-1);
    i=i+1;
    t(i)=t(i-1)+h;
    y_aim(i)=y_aim(i-1);
    x_aim(i)=x_aim(i-1)+v_aim*h;

    xn=x(i-1);
    yn=y(i-1);
    vn=v(i-1);
    tetan=tetta(i-1);
    pp=p(i-1);
    mm=m(i-1);
    aaa=ataka(i-1);
    [delx, dely, delv, delteta] = kuku(xn,yn,vn,tetan,mm,pp,aaa);
    x(i)=x(i-1)+delx;
    y(i)=y(i-1)+dely;
    v(i)=v(i-1)+delv;
    m(i)=m(1)-Q*t(i);
    p(i)=1.23*exp(-y(i)/10000);
    tetta(i)=tetta(i-1)+delteta;
    r(i)=sqrt(x(i)^2+y(i)^2);
    rc(i)=sqrt(x_aim(i)^2+y_aim(i)^2);
    alpha(i)=atan(y_aim(i)/x_aim(i));
    rr(i)=sqrt((x_aim(i)-x(i))^2+(y_aim(i)-y(i))^2);
    tetaTreb(i)=acos(v_aim*cos(teta_aim+pi/2-alpha(i))*r(i)/(v(i)*rc(i)))-(pi/2-alpha(i));
    ataka(i)=(tetaTreb(i)-
tetta(i))/h+(g*cos(tetta(i))/v(i))/(R/(m(i)*v(i))+(cy*S*p(i)*v(i))/(2*m(i)));
    if abs(ataka(i))>0.436;
        if ataka(i)>0
            ataka(i)=0.436;
        else
            ataka(i)=-0.436;
        end
    end
    ny(i)=(R*ataka(i)+1/2*cy*ataka(i)*p(i)*v(i)^2*S)/(m(i)*g);
    ataka2(i)=ataka(i)*57.29;
    tetta2(i)=tetta(i)*57.29;

    %fprintf('%d %d %d\n',ataka(i),tetta(i),tetaTreb(i))

```

```

end
disp(rr(i-1))
k1=(x_aim(150)/y_aim(150));
k2=(x_aim(250)/y_aim(250));
k3=(x_aim(350)/y_aim(350));
yy=1:y_aim(i);
xx=k1*yy;
xx2=k2*yy;
xx3=k3*yy;
figure(1);
plot(x_aim,y_aim,x,y,xx,yy,'r--',xx2,yy,'g--',xx3,yy,'b--',x(150),y(150),'r--o',x(150),y(150),'r--
o',x(250),y(250),'r--o',x(350),y(350),'r--o',x_aim(150),y_aim(150),'r--
o',x_aim(250),y_aim(250),'r--o',x_aim(350),y_aim(350),'r--o');
xlabel('Координата X(дальность)');
ylabel('Координата Y(высота)')
hold on;
grid on;

figure(2);
plot(t,ataka2);
xlabel('Координата времени');
ylabel('Угол атаки');
hold on;
grid on;

figure(3);
plot(t,tetta2);
xlabel('Координата времени');
ylabel('Угол возвышения');
hold on;
grid on;

figure(4);
plot(t,ny);
xlabel('Координата времени');
ylabel('перегрузка');
hold on;
grid on;

function [delx, dely, delv, delteta] = kuku(xn,yn,vn,tetan,mm,pp,aaa);
R=21250;
cx=0.3;
A=2;
cy=1;
g=9.81;
h=0.01;
S=0.034;
xa=xn;
ya=yn;
va=vn;
tetaa=tetan;
ataka=aaa;

```

$$\begin{aligned}x_a A &= v_a \cdot \cos(\text{tet}a); \\y_a A &= v_a \cdot \sin(\text{tet}a); \\v_a A &= R / \text{mm} - (c_x + A \cdot \text{ataka}^2) \cdot S \cdot \text{pp} \cdot v_a^2 / (2 \cdot \text{mm}) - g \cdot \sin(\text{tet}a); \\ \text{tet}a A &= R \cdot \text{ataka} / (\text{mm} \cdot v_a) + c_y \cdot \text{ataka} \cdot S \cdot \text{pp} \cdot v_a / (2 \cdot \text{mm}) - g \cdot \cos(\text{tet}a) / v_a;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_b &= x_a + x_a A \cdot (h/2); \\y_b &= y_a + y_a A \cdot (h/2); \\v_b &= v_a + v_a A \cdot (h/2); \\ \text{tet}a_b &= \text{tet}a + \text{tet}a A \cdot (h/2);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_b B &= v_b \cdot \cos(\text{tet}a_b); \\y_b B &= v_b \cdot \sin(\text{tet}a_b); \\v_b B &= R / \text{mm} - (c_x + A \cdot \text{ataka}^2) \cdot S \cdot \text{pp} \cdot v_b^2 / (2 \cdot \text{mm}) - g \cdot \sin(\text{tet}a_b); \\ \text{tet}a_b B &= R \cdot \text{ataka} / (\text{mm} \cdot v_b) + c_y \cdot \text{ataka} \cdot S \cdot \text{pp} \cdot v_b / (2 \cdot \text{mm}) - g \cdot \cos(\text{tet}a_b) / v_b;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_c &= x_a + x_b B \cdot (h/2); \\y_c &= y_a + y_b B \cdot (h/2); \\v_c &= v_a + v_b B \cdot (h/2); \\ \text{tet}a_c &= \text{tet}a + \text{tet}a_b B \cdot (h/2);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_b C &= v_c \cdot \cos(\text{tet}a_c); \\y_b C &= v_c \cdot \sin(\text{tet}a_c); \\v_b C &= R / \text{mm} - (c_x + A \cdot \text{ataka}^2) \cdot S \cdot \text{pp} \cdot v_c^2 / (2 \cdot \text{mm}) - g \cdot \sin(\text{tet}a_c); \\ \text{tet}a_c C &= R \cdot \text{ataka} / (\text{mm} \cdot v_c) + c_y \cdot \text{ataka} \cdot S \cdot \text{pp} \cdot v_c / (2 \cdot \text{mm}) - g \cdot \cos(\text{tet}a_c) / v_c;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_d &= x_a + x_b C \cdot h; \\y_d &= y_a + y_b C \cdot h; \\v_d &= v_a + v_b C \cdot h; \\ \text{tet}a_d &= \text{tet}a + \text{tet}a_c C \cdot h;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_b D &= v_d \cdot \cos(\text{tet}a_d); \\y_b D &= v_d \cdot \sin(\text{tet}a_d); \\v_b D &= R / \text{mm} - (c_x + A \cdot \text{ataka}^2) \cdot S \cdot \text{pp} \cdot v_d^2 / (2 \cdot \text{mm}) - g \cdot \sin(\text{tet}a_d); \\ \text{tet}a_d D &= R \cdot \text{ataka} / (\text{mm} \cdot v_d) + c_y \cdot \text{ataka} \cdot S \cdot \text{pp} \cdot v_d / (2 \cdot \text{mm}) - g \cdot \cos(\text{tet}a_d) / v_d;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{del}x &= h/6 \cdot (x_a A + 2 \cdot (x_b B + x_b C) + x_b D); \\ \text{del}y &= h/6 \cdot (y_a A + 2 \cdot (y_b B + y_b C) + y_b D); \\ \text{del}v &= h/6 \cdot (v_a A + 2 \cdot (v_b B + v_b C) + v_b D); \\ \text{del} \text{tet}a &= h/6 \cdot (\text{tet}a A + 2 \cdot (\text{tet}a_b B + \text{tet}a_c C) + \text{tet}a_d D); \\ \text{end}\end{aligned}$$

Библиографический список

1. Сущность метода наведения «Трёхточечный». – [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://studopedia.ru/10_211064_sushchnost-metoda-navedeniya-trehtochchniy.html.
2. Баллистика. – [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://ru.wikipedia.org/wiki/Баллистика>.
3. Лемешонок Т.Ю. Траекторные задачи в динамике движения летательных аппаратов; Балт. гос. техн. ун-т. – СПб., 2021. – 76 с.
4. Метод трёх точек. – [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://ru.wikipedia.org/wiki/Метод_трёх_точек.

GUIDANCE OF A CONTROLLED AIRCRAFT USING THE THREE-POINT METHOD**D.P. Borodulin**, *Student***A.A. Savinykh**, *Student***A.M. Astakhov**, *Student***E.V. Dvoynikova**, *Student***A.A. Kutilin**, *Student***Baltic State Technical University "VOENMEH" named after D.F. Ustinov
(Russia, St. Petersburg)**

***Abstract.** This article discusses code written to calculate navigation using the three-point method. The method involves determining three points - a control point, an aircraft (hereinafter referred to as the aircraft), a target, as well as constructing a coordinate system to track the position of the aircraft. The advantages of the method are its versatility and the ability to be used for guidance of different types of aircraft. Limitations are related to the accuracy of determining coordinates and the influence of external factors. In the process of work, the available theoretical data regarding the method were processed, and using the MatLab program, code was written to implement the method in practice. Finally, the optimization of this method and its application areas are discussed.*

***Keywords:** ballistics, three-point method, guidance, target, aircraft, angle of attack.*