ОБРАЗУЮЩИЕ И СООТНОШЕНИЯ В ОБОБЩЕННЫХ m-ТРЕУГОЛЬНЫХ ГРУППАХ НАД АССОЦИАТИВНЫМ КОЛЬЦОМ. II

Ж.С. Сатаров[1], *д-р физ.-мат. наук, профессор*
Э.А. Мамазиаева[2], *канд. физ.-мат. наук, доцент*
Ж.И. Мамбетов[1], *канд. физ.-мат. наук, доцент*
[1]Ошский технологический университет им. М. Адышева
[2]Ошский государственный университет
(Кыргызстан, г. Ош)

DOI:10.24412/2500-1000-2023-12-4-136-141

Аннотация. *Эта работа продолжает исследования, начатые в ее первой части, где с позиции образующих и соотношений были изучены обобщенные m-треугольные группы* $T^o_{n,m}(R),\ n \ge 2,\ (1 \le m \le n),$ *над произвольным ассоциативным кольцом R. Названные образующие и соотношения выявлялись там единообразно для всех значений m. Там же было найдено также комбинаторное описание проективных факторов* $PT^o_{n,m}(R)$ *названных групп. В комбинаторной теории вызывают интерес описания не только каких-то классических подгрупп полной линейной группы, но и их естественных частей. В этой части работы аналогичным образом выявляются образующие и определяющие соотношения обобщенной элементарной треугольной группы* $ET^o_{n,m}(R)$ *и ее проективного фактора* $PET^o_{n,m}(R)$ $(n \ge 2,\ 1 \le m \le n)$ *также над произвольным ассоциативным кольцом R.*

Ключевые слова: *коммутатор, коммутант, алфавит, стандартные формы, образующие, соотношения, трансформационные преобразования, полнота соотношений, центр.*

В этой работе мы продолжаем исследования, начатые в ее первой части. Поэтому сохраняя все определения и обозначения как раньше, и здесь мы R считаем произвольным ассоциативным ненулевым кольцом. Примем дополнительно еще следующие обозначения: для номеров $i,k,\ 1 \le i < k \le n,$ и аргумента $\varepsilon \in R^o$ $d_{ik}(\varepsilon) = d_i(\varepsilon) \circ d_k(\varepsilon^/);\ [x,y] = x^/ \circ y^/ \circ x \circ y$ –коммутатор элементов $x,y \in R^o,\ [R^o,R^o]$– коммутант группы R^o, т.е. подгруппа в R^o, порожденная всеми ее коммутаторами (он образует в R^o, нормальную подгруппу); $ET^o_{n,m}(R) = \langle d_{ik}(\varepsilon),\ \varepsilon \in R^o,\ 1 \le i < k \le n;\ t_{ik}(\lambda),\ \lambda \in R,\ m < i + m \le j \le n \rangle$, т.е. $ET^o_{n,m}(R)$–подгруппа в $T^o_{n,m}(R)$, порожденная всеми указанными там (элементарными) матрицами. Эту группу $ET^o_{n,m}(R)$ мы и назовем обобщенной элементарной m-треугольной группой степени n над кольцом R (отвечающей m-ой диагонали). Нашей целью в этой части работы является представление групп $ET^o_{n,m}(R),\ n \ge 2,\ (1 \le m \le n),$ в терминах образующих и соотношений. Наше представление производится совершенно одинаково (т.е. серийно) для всех указанных значений m и также использует метод трансформации, развитый еще в работах [1-5]. Несмотря на кажущуюся близость, рассматриваемая здесь группа $ET^o_{n,m}(R)$ имеет существенные различия от ее предшественниц $T^o_{n,m}(R)$.

1. Стандартные формы в $ET^o_{n,m}(R)$

Как показывают разложения $d_1([\varepsilon,\sigma]) = d^/_{1k}(\sigma \circ \varepsilon) \circ d_{1k}(\varepsilon) \circ d_{1k}(\sigma)$ и $d_k([\varepsilon^/,\sigma^/]) = d^/_{1k}(\varepsilon \circ \sigma) \circ d_{1k}(\varepsilon) \circ d_{1k}(\sigma),\ 1 < k \le n,$ одинарные матрицы $d_j(\tau),\ 1 \le j \le n,$ с аргументами $\tau \in [R^o,R^o]$ являются некоторыми элементами из $ET^{o}_{n,m}(R)$. Для представления группы $ET^{o}_{n,m}(R)$ мы изберем не порождающую ее систему, а более симметричный алфавит

$$d_{ik}(\varepsilon),\ \varepsilon\in R^{o},\ 1\le i<k\le n;\ d_{q}(\sigma),\ \sigma\in[R^{o},R^{o}],\ 1\le q\le n;$$
$$t_{ij}(\lambda),\ \lambda\in R,\ m<i+m\le j\le n. \qquad \text{(Eg)}$$

И в этой части мы используем стандартные формы элементов из $ET^{o}_{n,m}(R)$. Формы ступени i и здесь мы определим как $f_i=\prod t_{ik}(\lambda_k)$, где k пробегает множество $\{i+m,...,n\}$ (в произвольном порядке). В качестве же стандартных форм мы здесь объявляем всевозможные комбинации алфавита (*Eg*) вида

$$d_{1n}(\varepsilon_1)\circ...\circ d_{n-1,n}(\varepsilon_{n-1})\circ d_n(\varepsilon)\circ f_{n-m}\circ...\circ f_1, \qquad (sf)$$

Относительно введенных форм имеет место

Теорема 1. Всякая матрица x из $ET^{o}_{n,m}(R),\ n\ge 2,\ (1\le m\le n)$, представляется в стандартном виде (*sf*), причем единственным образом.

Доказательство этой теоремы проводится без существенных изменений как в соответствующей теореме из первой части. Его мы воспроизводить здесь не будем. Чтобы придерживаться единообразия в рассуждениях, и здесь мы при $m=n$ в (*sf*) будем считать $f_{n-m}\circ...\circ f_1=0$.

2. Система определяющих соотношений

Напишем в алфавите (*Eg*) следующие (легко проверяемые) соотношения группы $ET^{o}_{n,m}(R)$:

1. $d_{ik}(\varepsilon)=d_{in}(\varepsilon)\circ d_{kn}(\varepsilon^{/}),\ \ \mathrm{k<n};$
2. $d_q(\sigma)=d_{qn}(\sigma)\circ d_n(\sigma)\ \ 1\le q<n;$
3. $d_n(\sigma)\circ d_n(\varepsilon)=d_n(\sigma\circ\varepsilon);$
4. $d_{in}(\varepsilon)\circ d_{in}(\sigma)=d_{in}(\varepsilon\circ\sigma)\circ d_n([\varepsilon^{/},\sigma^{/}]);$
5. $d_{kn}(\varepsilon)\circ d_{in}(\sigma)=d_{in}(\sigma)\circ d_{kn}(\varepsilon)\circ d_n([\varepsilon^{/},\sigma^{/}]),\ k>i;$
6. $d_n(\sigma)\circ d_{in}(\varepsilon)=d_{in}(\varepsilon)\circ d_n(\varepsilon\circ\sigma\circ\varepsilon^{/});$
7. $t_{in}(\lambda)\circ d_n(\varepsilon)=d_n(\varepsilon)\circ t_{in}(\lambda+\lambda\varepsilon);$
8. $t_{ik}(\lambda)\circ d_n(\varepsilon)=d_n(\varepsilon)\circ t_{ik}(\lambda),\ k<n;$
9. $t_{ik}(\lambda)\circ d_{kn}(\varepsilon)=d_{kn}(\varepsilon)\circ t_{ik}(\lambda+\lambda\varepsilon);$
10. $t_{ik}(\lambda)\circ d_{in}(\varepsilon)=d_{in}(\varepsilon)\circ t_{ik}(\varepsilon^{/}\lambda+\lambda),\ k<n;$
11. $t_{in}(\lambda)\circ d_{in}(\varepsilon)=d_{in}(\varepsilon)\circ t_{in}(\lambda+\lambda\varepsilon^{/}+\varepsilon^{/}(\lambda+\lambda\varepsilon^{/}));$
12. $t_{in}(\lambda)\circ d_{rn}(\varepsilon)=d_{rn}(\varepsilon)\circ t_{in}(\lambda+\lambda\varepsilon^{/});$
13. $t_{ik}(\lambda)\circ d_{rn}(\varepsilon)=d_{rn}(\varepsilon)\circ t_{ik}(\lambda),\ k<n,\ r\ne i,k;$
14. $t_{ik}(\lambda)\circ t_{ik}(\alpha)=t_{ik}(\lambda+\alpha);$
15. $t_{ik}(\lambda)\circ t_{kj}(\alpha)=t_{ij}(\lambda\alpha)\circ t_{kj}(\alpha)\circ t_{ik}(\lambda);$
16. $t_{ik}(\lambda)\circ t_{rj}(\alpha)=t_{rj}(\alpha)\circ t_{ik}(\lambda),\ i\ne j,\ k\ne r.$

Чтобы продолжить дальнейшие рассуждения, вводим на множестве всех слов алфавита (*Eg*) отношения

$\overset{i}{\rightarrow}$, $1 \le i \le n-m$, положив $W \overset{i}{\rightarrow} V$ тогда и только тогда, когда слова W и V связаны между собой соотношением $W = XV$, где слово X не содержит ненулевые трансвекции $t_{kj}(*)$, $k \le i$. Эти отношения являются рефлексивными и транзитивными.

И здесь верна вспомогательная (трансформационная справа)

*Теорема*2. Пусть f_i–некоторая форма ступени i $(1 \le i \le n-m)$ и x–ненулевая буква алфавита (Eg), для которой при $x = t_{Rq}(\lambda)$ считается выполненным неравенство $p \ge i$. Тогда для них применяя соотношения 7–16 можно выполнить преобразования $V = f_i x \overset{i}{\rightarrow} g_i$, где g_i–также некоторая (уже другая!) форма ступени i.

Доказательство является комбинаторным и различает следующие случаи.

I. x–диагональная буква

Здесь мы применяя соотношения 7–13, 16 (и понимая под $f_1(\ne r)$ форму без букв $t_{ir}(\lambda)$, $\lambda \ne 0$), будем иметь $V = f_1(\ne r) \circ [t_{1r}(*) \circ x] = [f_1(\ne r) \circ x] \circ t_{1r}(*_r)$.

Продолжая это перемещение x и далее, мы к требуемой форме приходим так $V = (x \circ g_1) \overset{i}{\rightarrow} g_1$.

II. $x = t_{rj}(\lambda)$

В этом случае преобразование $V = f_1 \circ x \overset{i}{\rightarrow} g_1$ проводится использованием соотношений 14–16 как в теореме 2 из первой части. Эти повторяющиеся подробности здесь мы также опускаем.

3. Левые трансформационные преобразования

Этот пункт также является вспомогательным. Здесь нам нужен диагональный подалфавит

$$d_{ik}(\varepsilon),\ \varepsilon \in R^o,\ 1 \le i < k \le n,\ d_j(\sigma),\ \sigma \in [R^o, R^o],\ 1 \le j \le n. \qquad (Ed)$$

алфавита (Ed). Вводим на множестве всех слов этого алфавита отношения $\overset{i}{\leftarrow}$, $1 \le i < n-m$, положив $V \overset{i}{\leftarrow} W$ тогда и только тогда, когда эти слова связаны соотношением $V=WY$, где слово Y не содержит ненулевые буквы вида $d_{kj}(\varepsilon)$ $(\varepsilon \ne 0)$, $k \le i$. Эти отношения также рефлексивны и транзитивны.

Ниже нам нужна и следующая

Теорема 3 (о трансформации слева). Используя соотношения 1–6 всякое слово V алфавита (Ed) можно записать в виде

$$d_{1n}(\varepsilon_1) \circ \ldots \circ d_{n-1,n}(\varepsilon_{n-1}) \circ d_n(\varepsilon). \qquad (d)$$

Доказательство. Без потери общности рассматриваемое слово можно считать представленным в виде $V = Y \circ d_{1n}(*)$. Применяя к части Y соотношения 1 и 2, V можно считать состоящим только из букв вида $d_{1n}(\varepsilon)$ и $d_n(\sigma)$. Пусть теперь $Y = Y_1 \circ y$ т.е. y–последняя буква в Y. Применяя соотношения 4–6, далее мы будем иметь $V = Y_1 \circ [y \circ d_{1n}(*)] \overset{i}{\leftarrow} Y_1 \circ d_{1n}(\varepsilon)$, т.е. этой операцией мы добились сокращения длины Y. Продолжая эти сокращения и далее, мы приходим к записи $V \overset{i}{\leftarrow} d_{1n}(\varepsilon_1)$.

Это по определению отношения $\overset{i}{\leftarrow}$ означает, что $V = d_{1n}(\varepsilon_1) \circ X_1$, где X–некоторое слово алфавита (Ed), не содержащее ненулевые буквы вида $d_{1n}(*)$ $(* \ne 0)$. Аналогичным образом отщепляя из X букву

$d_{2n}(\varepsilon_2)$, мы будем иметь $V = d_{1n}(\varepsilon_1) \circ d_{2n}(\varepsilon_2) \circ X_1$, где X_1 не содержит буквы вида $d_{in}(*)$, $* \neq 0$, $i \leq 2$, и т.д. Описанный процесс отщеплений на (n-1)-м шагом приводит нас к разложению $V = d_{1n}(\varepsilon_1) \circ ... \circ d_{n-1,n}(\varepsilon_{n-1}) \circ X_{n-2}$, где остаток X_{n-2} не содержит буквы вида $d_{kn}(*)$, $* \neq 0$, $k < n$, т.е. состоит сплошь из одинарных букв $d_n(*)$. Применением соотношений 3 теперь последнее приводится к виду $d_n(\varepsilon)$ очевидным образом. Теорема доказана.

4. Комбинаторное задание группы $ET^o_{n,m}(R)$

Основной результат работы сформулируется как

Теорема 4. Обобщенная элементарная m-треугольная группа $ET^o_{n,m}(R)$, $n \geq 2$, $(1 \leq m \leq n)$, над ассоциативным кольцом $R \neq \{0\}$ в образующих (Ed) задается соотношениями 1–16.

Доказательство и здесь разбивается на две части.

I. Приведение к стандартному виду

В этом пункте мы покажем, что применяя соотношения 1–16, всякое слово W алфавита (Ed) можно преобразовать к его стандартному виду $s(W)$. Как и в теореме 3, считая W составленным только из букв $t_{ik}(\lambda)$, $d_{1n}(\varepsilon)$, $d_n(\sigma)$ и повторяя с небольшими изменениями рассуждения теоремы 4 из первой части работы (т.е. соотношениями 1, 2 и 7–16), слово W можно записать в виде

$$W = D \circ f_{n-m} \circ ... \circ f_2 \circ f_1,$$

где D–некоторое слово подалфавита (Ed). Применяя теперь к D только что доказанную теорему 3 (т.е. соотношения 1–6), приводим его к виду $D = d_{1n}(\varepsilon_1) \circ ... \circ d_{n-1,n}(\varepsilon_{n-1}) \circ d_n(\varepsilon)$. Таким образом, равенство $W=s(W)$ из соотношений 1–16 действительно может быть извлечено.

II. Полнота соотношений.

Пусть теперь W=0–произвольное соотношение группы $ET^o_{n,m}(R)$ в порождающих (Ed). Применяя к его левой части результат п. I, заменим последнее с $s(W)$=0. Но по теореме 1 последнее возможно только при нулевых буквах слова $s(W)$. А это уже означает выводимость соотношения W=0 из 1–16. Теорема 4 доказана полностью.

5. Описание проективного фактора $PET^o_{n,m}(R)$

Отправляясь от основной теоремы 4, мы здесь приводим комбинаторное задание фактора $PET^o_{n,m}(R) = ET^o_{n,m}(R)/C$ элементарной группы $ET^o_{n,m}(R)$ по ее центру $C = centET^o_{n,m}(R)$. Случай m=n и здесь является тривиальным и для нас никакого интереса не представляет.

Считая всюду ниже $m<n$, рассмотрим в $ET^o_{n,m}(R)$ произвольную центральную матрицу x=(x_{ij}) (т.е. матрицу из С). Взяв произвольно и матрицу $d_{in}(\varepsilon)$, $\varepsilon \in R^o$, $1 \leq i < n$, имеем равенство

$$d_{in}(\varepsilon) \circ x = x \circ d_{in}(\varepsilon).$$

Последнее дает нам, что

$$\varepsilon \circ x_{ii} = x_{ii} \circ \varepsilon, \ 1 \leq i < n, \qquad (i)$$

и $\varepsilon^{/} \circ x_{nn} = x_{nn} \circ \varepsilon^{/} (\to \varepsilon \circ x_{nn} = x_{nn} \circ \varepsilon)$, т.е. равенство ($i$) верно при всех i=1,2,…,n. Таким образом, включения

$$x_{kk} \in centR^o, \; k = 1,2,...,n,$$

имеют место и здесь. Далее, включения $x_{ij} \in AnnR$ и равенства

$$x_{ii}\lambda = \lambda x_{jj} \qquad (s)$$

$(i \le n-m, \; j \ge i+m)$ верны и показываются они как в первой части работы.

Таким образом, в центральной матрице x все ее угловые позиции x_{ij} обязаны попасть в аннулятор $AnnR$, а диагональные же ее элементы, наряду с $(\in)$ должны удовлетворять также и условиям "скалярности" (s). А то, что матрица $x = (x_{ij})$, удовлетворяющая всем перечисленным выше требованиям, попадет в центр C, теперь уже проверяется непосредственно. Взяв в качестве порождающих слов центра C квазитрансвекции $t_{ij}(\delta)$, $\delta \in AnnR$ $(< i, j >$ –угловые позиции) и "скалярные" слова $d_1(\varepsilon_1) \circ ... \circ d_n(\varepsilon_n)$, мы можем здесь сформулировать следующий результат.

Теорема5. Проективная обобщенная m-треугольная группа $PET^o_{n,m}(R)$, $n \ge 2$, $(1 \le m \le n)$, над ненулевым ассоциативным кольцом R в образующих (Ed) представляется соотношениями 1–16, угловыми соотношениями $t_{ij}(\delta) = 0$, $\delta \in AnnR$ $(i \le n-m, \; j \ge i+m)$, и еще "скалярными" соотношениями

$$d_1(\varepsilon_1) \circ ... \circ d_n(\varepsilon_n) = 0$$

(здесь $\varepsilon_k \in centR^o$).

В заключение отметим, что аналогичные вопросы для мономиальных групп $Mon_n(R)$, $PMon_n(R)$, $n \ge 2$, над ассоциативным кольцом R ранее были решены в работах [6] и [7].

Библиографический список

1. Сатаров Ж.С. Образующие элементы и определяющие соотношения в линейных группах: автореф. дисс. … д-ра физ.-мат. наук. Красноярск, 1998. 31 с.

2. Сатаров Ж.С. Определяющие соотношения подгрупп полной линейной группы, содержащих группу диагональных матриц // Изв. вузов. Математика. 1991. №1. С. 47-53.

3. Сатаров.Ж.С. Определяющие соотношения в элементарной треугольной группе над кольцами // Мат. заметки. 1986. Т. 39. №6. С. 785-790.

4. Сатаров Ж.С. Образующие и определяющие соотношения обобщенной полной линейной группы над полулокальными кольцами без единицы. I // Изв. вузов. Математика. 2006. №10. С. 59-67.

5. Сатаров Ж.С. Образующие и определяющие соотношения обобщенной полной линейной группы над полулокальными кольцами без единицы. II // Изв. вузов. Математика. 2006. №11. С. 33-41.

6. Сатаров Ж.С., Мамазиаева Э.А., Мамбетов Ж.И., Суйунбек кызы А. Порождающие и соотношения в мономиальных группах над ассоциативным кольцом (часть 1) // Бюллетень науки и практики. 2023. Т.9. №6. С. 15-22. – URL: https://doi.org/10.33619/2414–2948/91/01.

7. Сатаров Ж.С., Мамазиаева Э.А., Мамбетов Ж.И., Суйунбек кызы А. Порождающие и соотношения в мономиальных группах над ассоциативным кольцом (часть 2) // Бюллетень науки и практики. 2023. Т. 9. №6. С. 23-31.

URL: https://doi.org/10.33619/2414–2948/91/02.

GENERATORS AND RELATIONS IN GENERALIZED m-TRIANGULAR GROUPS OVER AN ASSOCIATIVE RING. I

Zh.S. Satarov [1], *Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor,*
E.A. Mamaziaeva[2], *Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor*
Zh.I. Mambetov[1], *Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor*
[1]Osh Technological University named after M. Adyshev
[2]Osh State University
(Kyrgyzstan, Osh)

Abstract. *This work continues the research started in its first part, where generalized m-triangular groups over an arbitrary associative ring R were studied from the position of generators and relations. The named generators and ratios were identified there uniformly for all values of m. A combinatorial description of the projective factors of these groups was also found there. In combinatorial theory, descriptions of not only some classical subgroups of a complete linear group, but also their natural parts, are of interest. In this part of the work, the generative and defining relations of a generalized elementary triangular group and its projective factor are similarly identified over an arbitrary associative ring R.*
Keywords: *commutator, commutator, alphabet, standard forms, generators, relations, transformational transformations, completeness of relations, center.*