ОБРАЗУЮЩИЕ И СООТНОШЕНИЯ В ОБОБЩЕННЫХ m-ТРЕУГОЛЬНЫХ ГРУППАХ НАД АССОЦИАТИВНЫМ КОЛЬЦОМ. I

Ж.С. Сатаров[1], *д-р физ.-мат. наук, профессор*
Э.А. Мамазиаева[2], *канд. физ.-мат. наук, доцент*
Ж.И. Мамбетов[1], *канд. физ.-мат. наук, доцент*
[1]Ошский технологический университет им. М. Адышева
[2]Ошский государственный университет
(Кыргызстан, г. Ош)

DOI:10.24412/2500-1000-2023-12-4-129-135

Аннотация. *Вопрос представления линейных групп (и связанных с ними конструкций) образующими элементами и определяющими соотношениями всегда представлял интерес в общей комбинаторной теории групп. В названном направлении на сегодня уже накопилось большое количество журнальных и книжных материалов. Возникли также новые методы исследования. Одним из них является универсальный комбинаторный метод трансформации, суть которого заключается в преобразовании слов выбранного порождающего алфавита изучаемой группы к их стандартным формам. В работе дается описание через образующие и определяющие соотношения обобщенных m-треугольных групп* $T^{\circ}_{n,m}(R), n \geq 2$*, заданных над произвольным ненулевым ассоциативным кольцом. Опираясь на этот результат, находятся комбинаторные описания также проективных факторов* $PT^{\circ}_{n,m}(R)$ *названных групп. В основу решения названных задач положен упомянутый метод трансформации.*

Ключевые слова: *образующие, соотношения, квазиумножение, квазигруппа, обобщенная m-треугольная группа, стандартные формы, трансформация букв, полнота соотношений, проективный фактор.*

Представление линейных (и близких к ним) групп в терминах образующих и соотношений составляет один из главных вопросов комбинаторной теории групп. Этот раздел уже давно вырос в специальное направление в общей теории и в настоящее время испытывает бурное развитие. В рамках названной тематики можно отметить замечательные (и уже ставшие классическими) результаты [1-4]. Предлагаемая работа также посвящена к названному разделу, а точнее здесь мы дадим комбинаторное описание обобщенных m-треугольных групп степени $n \geq 2$ над произвольным ассоциативным кольцом R.

Всюду ниже R считается произвольным ненулевым ассоциативным кольцом, для которого существование 1 не обязательно. Через $\circ$, как всегда, мы обозначаем квазиумножение в R, т.е. $x \circ y = x + xy + y$ для элементов $x, y \in R$. Элемент x из R называется квазиобратимым, если для него $x \circ y = 0 = y \circ x$ при некотором $y \in R$. По квазиобратимому x его квазиобратное всегда определяется однозначно, и оно обозначается как $y = x'$. Совокупность всех квазиобратимых элементов R° из R непуста (например $0 \in R^{\circ}$) и она образует группу относительно операции $\circ$. Единицей в R° послужит элемент 0. Эту группу мы назовем квазигруппой кольца R.

Положив в частном случае вместо R кольцо (верхних) треугольных матриц $T_n(R)$, мы приходим к понятию обобщенной треугольной группы $[T_n(R)]^o = T^o_n(R)$ степени n над кольцом R. Для натурального $m, 1 \leq m \leq n,$ по аналогии с [5] (см.стр.24) обозначим через $T^o_{n,m}(R)$ множество матриц из $T^o_n(R)$ с m-1 нулевыми диагоналями выше главной, т.е.

$$T^o_{n,m}(R) = \{x = (x_{ij}) \in T^o_n(R) : o < j - i < m \to x_{ij} = 0\}.$$

Покажем, что введенные множества образуют подгруппы в $T^o_{n,m}(R)$. Для этого нам достаточно проверить замкнутость $T^o_{n,m}(R)$ относительно матричного квазиумножения и операции взятия квазиобратного элемента. Пусть наряду с указанной выше $x = (x_{ij})$ взята из $T^o_{n,m}(R)$ еще одна матрица $y = (y_{ij})$. Как легко видеть, для позиций $\langle i, j\rangle$, $0 < j - i < m$, квазипроизведения этих матриц имеют место формулы

$$(x \circ y)_{ij} = x_{ij} + \sum_{1\le x\le n} x_{ik} y_{kj} + y_{ij} = \sum_{1\le x\le n} x_{ik} y_{kj}.$$

Поскольку при $k \ne i$ $0 < j - i < m$ $\& i \le k \le j \to 0 < k - i < m$, первые сомножители x_{ik}, $i < k \le j$, последней суммы будут равны нулю. При же $k = i$ мы имеем $y_{kj} = 0$. Таким образом, равенства $(x \circ y)_{ij} = 0$ верны для всех указанных выше позиций $\langle i, j\rangle$, т.е. замкнутость в $T^o_{n,m}(R)$ имеет место.

Чтобы продолжить рассуждения и далее, нам необходимы и следующие обозначения: для $\varepsilon \in R^\circ$ $d_i(\varepsilon)$–матрица из $T^o_n(R)$, отличающаяся от нулевой матрицы лишь позицией $\langle i, i\rangle$, где стоит элемент ε; аналогичным образом $t_{ij}(\lambda)$, $i \ne j$, будет означать матрицу (также из $T^o_n(R)$), полученную от нулевой матрицы заменой ее позиции $\langle i, j\rangle$ на аргумент $\lambda \in R$ (они называются квазитрансвекциями). Для введенных матриц очевидны формулы

$$d_i^{/}(\varepsilon) = d_i(\varepsilon^{/}),\ t_{ij}^{/}(\lambda) = t_{ij}(-\lambda). \qquad (^{/})$$

Пусть теперь x–произвольная матрица из $T^o_{n,m}(R)$. Из равенства (sf) настоящей работы (см.п.I) следует, что

$$x^{/} = f_1^{/} \circ \ldots \circ f_{n-m}^{/} \circ d_n^{/}(\varepsilon_n) \circ \ldots \circ d_1^{/}(\varepsilon_1)$$

(f_i – некоторые слова, составленные из квазипроизведения трансвекций вида $t_{ik}(\lambda_k)$). Применение к правой части последнего равенства соотношений ($^{/}$) приведет нас к представлению матрицы $x^{/}$, состоящему из квазипроизведения (конечного числа) диагональных букв $d_k(\varepsilon)$ и квазитрансвекций $t_{ij}(*)$. А это, согласно уже установленной выше замкнутости, означает принадлежность в $T^o_{n,m}(R)$ не только x, но и квазиобратной ей матрицы $x^{/}$. Итак, групповое включение $T^o_{n,m}(R) \le T^o_n(R)$ нами полностью установлено.

Введенную группу $T^o_{n,m}(R)$ мы и назовем обобщенной m-треугольной группой степени $n \ge 2$ над кольцом R. Как отмечено выше, нашей основной целью в этой части работы является задание в терминах образующих и соотношений треугольных групп $T^o_{n,m}(R)$ $m = 1,2,\ldots,n$. Она проводится совершенно одинаково для всех указанных значений m. Введенные группы в $T^o_n(R)$ образуют убывающую цепочку

$$T^o_n(R) = T^o_{n,1}(R) > T^o_{n,2}(R) > \ldots > T^o_{n,n}(R) = D^o_n(R)$$

(где $D_n^0(R) \simeq \underbrace{R^0 \times ... \times R^0}_{n\ раз}$ – диагональ в $T_n^o(R)$). Аналогичное серийное описание было проведено ранее и в работе [6] для подгрупп полной линейной группы $GL_n(\Lambda), n \ge 2,$ над локальным кольцом Λ (при небольших ограничениях на Λ), содержащих группу диагональных матриц $D_n(\Lambda)$. По замыслу наша работа является близкой также к работе [7], где было изучено комбинаторное строение треугольной группы любого (даже бесконечного) порядка.

Нетрудно видеть, что в случае наличия 1 в *R* отображение

$T_{n,m}(R) \to T_{n,m}^o(R),\ e + x \to x$

(*e*–единичная матрица порядка *n*), задает изоморфизм групп. Поэтому введенные выше группы $T_{n,m}^o(R)$ являются обобщениями обычных *m*-треугольных групп (соответственно) на самые общие случаи ассоциативных колец *R*. При решении поставленной задачи мы вновь применяем метод трансформации, развитый еще в работах [9] и [10].

1. Стандартные формы в $T_{n,m}^o(R)$

Они определяются относительно какой-то порождающей системы названной группы. В качестве таковой мы возьмем систему

$$d_k(\varepsilon), \varepsilon \in \mathrm{R}^o,\ 1 \le k \le n;\ t_{ij}(\lambda), \lambda \in R,\ j\text{-}i \ge m. \qquad (g)$$

Тот факт, что группа $T_{n,m}^o(R)$ порождается алфавитом (*g*), напрямую следует из теоремы 1 настоящей работы. Под формами ступени *i* здесь мы понимаем слова вида $f_i = \prod_{i+m \le x \le n} t_{ik}(\lambda_k)$ (где умножение – квазиумножение и порядок следования сомножителей несущественен). В качестве же стандартных форм здесь объявляются всевозможные комбинации алфавита (*g*) вида

$$x = d_1(\varepsilon_1) \circ ... \circ d_n(\varepsilon_n) \circ f_{n-m} \circ ... \circ f_1 \qquad (sf)$$

(где при *m*=*n* выражению $f_{n-m} \circ ... \circ f_1$ придается смысл 0).

Относительно введенных форм имеет место

Теорема 1. Всякая матрица *x* из $T_{n,m}^o(R)$, $n \ge 2$, представляется в стандартном виде (*sf*), причем такое представление единственно.

Доказательство. Единственность. Пусть $f_1 = t_{1,m+1}(\lambda_{m+1}) \circ ... \circ t_{1n}(\lambda_n)$. Поскольку здесь $d_2(\varepsilon_2) \circ ... \circ d_n(\varepsilon_n) \circ f_{n-m} \circ ... \circ f_2$ имеет клеточно-диагональный вид $diag(0, x_1)$, $d_1(\varepsilon_1) \circ f_1$ имеет одинаковую с *x* первую строку, т.е. $x_{11}, 0, ..., 0, x_{1,m+1}, ..., x_{1n}$. Приравнивание соответствующих позиций здесь дает нам $\varepsilon_1 = x_{11}, \lambda_{m+1} = \varepsilon_1^/ x_{1,m+1} + x_{1,m+1}, ..., \lambda_n = \varepsilon_1^/ x_{1n} + x_{1n}$, т.е. ε_1 и f_1 матрицей *x* определяются однозначно. Переходя теперь от *x* к матрице $d_1^/(\varepsilon_1) \circ x \circ f_1^/ = d_2(\varepsilon_2) \circ ... \circ d_n(\varepsilon_n) \circ f_{n-m} \circ ... \circ f_2$, мы аналогичным образом заключаем единственность ε_2 и f_2 и т.д. Описанный процесс на (*n*-*m*)-м шаге приводит нас к заключению об единственности ε_{n-m} и f_{n-m}. А далее равенства $\varepsilon_k = x_{kk}, n - m < k \le n,$ имеют место уже очевидным образом.

Что касается части *существования* теоремы, то она является прямым следствием теоремы 3 настоящей работы. Поэтому и ее мы здесь можем опустить. Случай *m*=*n* также можно включить в эту теорему, если считать, что там $f_{n-m} \circ ... \circ f_1 = 0$.

2. Определяющие соотношения

В алфавите (g) можно написать следующие (проверяемые напрямую) соотношения группы $T^{o}_{n,m}(R)$:

1. $d_i(\varepsilon)\circ d_i(\sigma)=d_i(\varepsilon\circ\sigma)$;
2. $d_i(\varepsilon)\circ d_k(\sigma)=d_k(\sigma)\circ d_i(\varepsilon),\quad i\neq k$;
3. $t_{ik}(\lambda)\circ t_{ik}(\alpha)=t_{ik}(\lambda+\alpha)$;
4. $t_{ik}(\lambda)\circ t_{rj}(\alpha)=t_{rj}(\lambda)\circ t_{ik}(\alpha),\ k\neq r,\ i\neq j$;
5. $t_{ik}(\lambda)\circ t_{kj}(\alpha)=t_{ij}(\lambda\alpha)\circ t_{kj}(\alpha)\circ t_{ik}(\lambda)$;
6. $t_{ik}(\lambda)\circ d_i(\varepsilon)=d_i(\varepsilon)\circ t_{ik}(\lambda+\varepsilon^{/}\lambda)$;
7. $t_{ik}(\lambda)\circ d_k(\varepsilon)=d_k(\varepsilon)\circ t_{ik}(\lambda+\lambda\varepsilon)$;
8. $t_{ik}(\lambda)\circ d_r(\varepsilon)=d_r(\varepsilon)\circ t_{ik}(\lambda);\ r\neq i,k.$

Нашей ближайшей целью является показать полноту системы соотношений 1–8 для группы $T^{o}_{n,m}(R)$ в порождающих (g). Для этой цели вводим на множестве всех слов алфавита (g) (бинарные) отношения $\overset{i}{\rightarrow}$, $1\leq i\leq n-m$, положив $W\overset{i}{\rightarrow}V$ тогда и только тогда, когда слова W и V связаны соотношением $W=X\circ V$, где X–некоторое слово, не содержащее ненулевые квазитрансвекции вида $t_{kj}(*),\ k\leq i$. Как легко проверить, введенные отношения $\overset{i}{\rightarrow}$ являются рефлексивными и транзитивными.

Далее нам понадобится и следующая

Теорема 2 (о трансформации букв). Пусть f_i – некоторая форма ступени i и x – ненулевая буква алфавита (g), для которой при $x=t_{pq}(\lambda)$ считается выполненным условие $p\geq i$. Тогда для них применяя соотношения 3–8 можно выполнить преобразование $V=f_i\circ x\overset{i}{\rightarrow}g_i$, где g_i – также некоторая форма ступени i.

Доказательство является комбинаторным и проводится в два этапа. Ниже мы для упрощения записей под $f_i(\neq r)$ условимся понимать форму f_i, не содержащую букву вида $t_{ir}(*),\ *\neq 0$.

Этап I. $x=d_k(\varepsilon)$

Здесь мы применяя соотношения 6–8, будем иметь

$V=f_i(\neq n)\circ[t_{in}(\lambda)\circ d_k(\varepsilon)]=[f_i(\neq n)\circ d_k(\varepsilon)]\circ t_{in}(\lambda).$ Продолжая это перемещение $d_k(\varepsilon)$ и далее, мы к требуемому виду приходим так

$V=d_k(\varepsilon)\circ t_{i,i+m}(*_{i+m})\circ\ldots\circ t_{in}(*_n)\rightarrow t_{i.i+m}(*_{i+m})\circ\ldots\circ t_{in}(*_n)=g_i$.

Этап II. $x=t_{rj}(\lambda)$**.**

Здесь наше рассмотрение разветвляется следующим образом.

а) $r=i$. Применяя соотношения 4 и 3, здесь мы требуемую форму получаем так

$V=f_i(\neq j)\circ[t_{ij}(*)\circ t_{ij}(\lambda)]=[f_i(\neq j)\circ t_{ij}(*+\lambda)]=g_i$.

в) $r>i$. В этом случае мы используя соотношения 4 и 5, будем иметь

$$V=f_i(\neq r)\circ[t_{ir}(*)\circ t_{rj}(\lambda)]=[f_i(\neq r)\circ t_{rj}(\lambda)]\circ t_{rj}(\alpha)\circ t_{ir}(*)=t_{rj}(*)\circ f_i(\neq r)\circ t_{ij}(*)\circ t_{ir}(*)\rightarrow.$$

$$[f_i(\neq r)\circ t_{ij}(*)]\circ t_{ir}(*).$$

Полученное слово применением к выделенному отрезку уже разобранного пункта *а*) приводит нас к требуемому виду как $V\overset{i}{\rightarrow}f_i(\neq r)\circ t_{ir}(*)=g_i$. Теорема 2 доказана.

3. Представление группы $T^o_{n,m}(R)$

У нас теперь все готово, чтобы сформулировать основное утверждение о представлении названной группы.

Теорема 3. Обобщенная m-треугольная группа $T^o_{n,m}(R)$, $n \geq 2$ $(1 \leq m \leq n)$, над ассоциативным кольцом $R \neq \{0\}$ в образующих (g) представляется соотношениями 1–8.

Доказательство состоит из двух частей.

I. Приведение к стандартному виду.

В этой части мы покажем приводимость любого слова W алфавита (g) к его стандартному виду $S(W)$ при помощи соотношений 1–8. Без потери общности заданное слово можно считать представленным в виде

$$W \overset{i}{\rightarrow} f_1 \circ X, \tag{0}$$

где f_1–некоторая форма ступени 1 и X–соответствующее ей дополнение. Пусть далее, $X = x \circ X_1$ т.е. x–первая буква дополнения X. Применяя трансформационную теорему 2 (т.е. при помощи соотношений 3–8), заданное слово приводим к виду $W = [f_1 \circ x] \circ X_1 \overset{1}{\rightarrow} g_1 \circ X_1$, т.е. получаем запись того же вида (0), но уже с укороченным дополнением X. Продолжая это сокращение и далее (до тех пор, пока не исчерпается все X), мы приходим к записи вида $W \overset{1}{\rightarrow} f_1$ (где уже f_1 –другая форма ступени 1). Последнее согласно определению $\overset{1}{\rightarrow}$ означает, что $W = Y_1 \circ f_1$, где (уже левое) дополнение Y_1 не содержит квазитрансвекции $t_{1j}(*), * \neq 0$. Теперь мы аналогичным образом поступая с Y_1, вытягиваем из него форму f_2 (ступени 2), т.е. имеем $W = Y_2 \circ f_2 \circ f_1$, где дополнение Y_2 не содержит квазитрансвекции вида $t_{ik}(*), * \neq 0,\ i \leq 2,$ и т.д. Описанный процесс отщеплений форм на $(n\text{-}m)$-м шаге приводит нас к записи

$$W = Y_{n-m} \circ f_{n-m} \circ \ldots \circ f_2 \circ f_1,$$

где уже слово Y_{n-m} (по определению $\overset{n-m}{\rightarrow}$) не содержит трансвекции вида $t_{ik}(*), * \neq 0,\ i \leq n-m,$ т.е. оно состоит сплошь из диагональных букв алфавита (g). Применением к нему соотношений 1 и 2, теперь оно приводится к виду $d_1(\varepsilon_1) \circ \ldots \circ d_n(\varepsilon_n)$ очевидным образом, т.е. заданное слово приведено к его стандартному виду $S(W)$.

II. Полнота соотношений 1–8.

Пусть теперь W=0–произвольное соотношение группы $T^o_{n,m}(R)$ (в образующих (g)). Записав левую часть в ее стандартном виде (при помощи соотношений 1–8), заменим его с $S(W)$=0. Но по теореме 1 последнее возможно только при нулевых буквах формы $S(W)$. А это уже означает выводимость заданного соотношения W=0 из 1–8. Теорема 3 доказана полностью.

Как мы отметили выше, при m=n считается $f_{n-m} \circ \ldots \circ f_1 = 0$, т.е. в этом случае как трансвекции из (g), так и (связанные с нами) соотношения 3–8, исчезают из нашего поля рассмотрения. Другими словами (g) заменяется с подалфавитом

$$d_i(\varepsilon),\ \varepsilon \in R^o,\ 1 \leq i \leq n,$$

а соотношения же 1–8 с 1,2, и здесь теорема 3 просто-попросту превращается в диковское задание диагональной подгруппы $D^0_n(R)$.

4. Задание проективного фактора $PT^o_{n,m}(R)$.

Опираясь на (основную) теорему 3, в этом пункте мы дадим комбинаторное представление фактора группы $T^o_{n,m}(R)$ по ее центру $C = centT^o_{n,m}(R)$. А для этого нам сначала нужно вычислить этот центр, а точнее найти какую-нибудь порождающую C систему слов W алфавита (g). Тогда рассматриваемый фактор будет представлен как $T^o_{n,m}(R) = \langle (g) \,||\, 1-8 \,\&\, W = 0 \rangle$ (см.[11], стр.77).

В случае, когда m=n, изучаемая группа $T^o_{n,m}(R)$ превращается в (классическую) диагональную группу $D^0_n(R)$. Задание ее проективного фактора не представляет труда и оно не интересно.

Случаи же m<n в $T^o_{n,m}(R)$ требуют дополнительного исследования. Пусть $x = (x_{ij})$ – произвольная матрица из центра C. Взяв также произвольно (диагональную) матрицу $d_k(\varepsilon),\ \varepsilon \in R^o,\ 1 \le k \le n,$ мы имеем

$$d_k(\varepsilon) \circ x = x \circ d_k(\varepsilon).$$

Последнее очевидным образом приведет нас к $\varepsilon \circ x_{kk} = x_{kk} \circ \varepsilon,$ т.е. к включению

$$x_{kk} \in centR^o. \qquad (\in)$$

Рассмотрим в x ее “угловые” позиции x_{ij} (т.е. позиции, для которых $i \le n-m$ и $j \ge i+m$). Для этих элементов мы имеем и равенства

$$t_{ij}(\lambda) \circ x = x \circ t_{ij}(\lambda)$$

(λ–произвольный элемент из R). Сравнение в последнем позиций $<i,i>,\ <j,j>,\ <j,i>$ приведет нас к $\lambda x_{ij} = 0 = x_{ij}\lambda$ и

$$x_{ii}\lambda = \lambda x_{jj}. \qquad (s)$$

Таким образом, в центральной матрице x все ее угловые элементы x_{ij} обязаны входить в аннулятор $AnnR$, а диагональные же ее элементы (помимо включений ($\in$)) должны удовлетворять еще и требованиям “скалярности” (s). Теперь же проверка того, что матрица x, удовлетворяющая всем перечисленным выше условиям, будет центральной в $T^o_{n,m}(R)$, уже не представляет труда. Стало очевидным также, что центр C порождается квазитрансвекциями $t_{ij}(\delta),\ \delta \in AnnR\ (i \le n-m,\ j \ge i+m,$ и всеми “скалярными” словами $d_1(\varepsilon_1) \circ ... \circ d_n(\varepsilon_n)$.

Подытаживая эти факты, мы здесь можем сформулировать следующий результат.

Теорема 4. Проективная обобщенная m-треугольная группа $PT^o_{n,m}(R),\ n \ge 2\ (1 \le m < n),$ над ассоциативным кольцом $R \ne \{o\}$ в образующих (g) представляется соотношениями 1–8, угловыми соотношениями $t_{ij}(\delta) = 0,\ \delta \in AnnR\ (i \le n-m,\ j \ge i+m),$ и еще следующими “скалярными” соотношениями

$$d_1(\varepsilon_1) \circ ... \circ d_n(\varepsilon_n) = 0$$
$$(\varepsilon_k \in centR^o).$$

Библиографический список

1. Green S.M. Generators and relations for the special linear group over a division ring // Proc. Amer. Math. Soc. 62, 1977, №2. P. 229-232.

2. Носков Г.А. Порождающие элементы и определяющие соотношения симплектических групп над некоторыми кольцами // Мат. заметки. 1974. Т. 16. №2. С. 237-240.

3. Романовский Н.С. Образующие и определяющие соотношения полной линейной группы над локальным кольцом // Сиб. мат. ж. 1971. Т.XII. №4. С. 922-925.

4. Янь Ши-цзянь. Определяющие соотношения n-мерной модулярной группы // Бейцзин шифань дасаюэ кэсюэ луньвень сюанцзи. 1959. окт. С. 48-70.

5. Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И. Основы теории групп. – М. Наука, 1982. 288 с.

6. Сатаров Ж.С. Определяющие соотношения подгрупп полной линейной группы, содержащих группу диагональных матриц // Изв. вузов. Математика. 1991. №1. С. 47-53.

7. Сатаров Ж.С. Образующие элементы и определяющие соотношения в линейных группах // Автореферат дисс…. докт. физ.-мат. наук. Красноярск, 1998. 31 с.

8. Сатаров Ж.С. Определяющие соотношения в элементарной треугольной группе над кольцами // Мат. заметки. 1986. Т.39. №6. С. 785-790.

9. Сатаров Ж.С. Образующие и определяющие соотношения обобщенной полной линейной группы над полулокальными кольцами без единицы. I // Изв. вузов. Математика. 2006. №10. С. 59-67.

10. Сатаров Ж.С. Образующие и определяющие соотношения обобщенной полной линейной группы над полулокальными кольцами без единицы II // Изв. вузов. Математика. 2006. №11. С. 33-41.

11. Магнус В., Каррас А., Солитэр Д. Комбинаторная теория групп. – М. Наука, 1974. 450 с.

GENERATORS AND RELATIONS IN GENERALIZED m-TRIANGULAR GROUPS OVER AN ASSOCIATIVE RING. I

Zh.S. Satarov [1], *Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor,*
E.A. Mamaziaeva[2], *Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor*
Zh.I. Mambetov[1], *Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor*
[1]Osh Technological University named after M. Adyshev
[2]Osh State University
(Kyrgyzstan, Osh)

Abstract. *The question of representing linear groups (and related constructions) by forming elements and defining relations has always been of interest in the general combinatorial theory of groups. A large number of magazine and book materials have already accumulated in this direction. New research methods have also emerged. One of them is a universal combinatorial transformation method, the essence of which is to transform the words of the selected generating alphabet of the studied group to their standard forms. The paper describes the generative and defining relations of generalized m-triangular groups defined over an arbitrary nonzero associative ring. Based on this result, combinatorial descriptions of the projective factors of these groups are also found. The mentioned transformation method is used as the basis for solving these tasks.*

Keywords: *generators, relations, quasi-multiplication, quasi-group, generalized m-triangular group, standard forms, transformation of letters, completeness of relations, projective factor.*