ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ НЕСТАЦИОНАРНОГО КОНВЕКТИВНОГО ПЕРЕНОСА С НАЧАЛЬНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

А.Н. Куликов[1], *канд. физ.-мат. наук, доцент*
И.В. Казначеева[2], *канд. техн. наук, учитель высшей квалификационной категории*
[1]Калужский государственный университет имени К.Э. Циолковского
[2]Лицей №48 г. Калуги
(Россия, г. Калуга)

DOI:10.24412/2500-1000-2023-12-4-119-123

Аннотация. *Статья представляет собой исследование задачи гидродинамической дисперсии, включающее в себя некоторые виды массопереноса нейтрального индикатора при фильтрации жидкостей. Целью исследования является определение влияния начального распределения на процесс массопереноса и выявление особенностей его динамики. В статье получены решения частных случаев задачи Коши для некоторых моделей учитывающих растворение веществ. Авторы отмечают, что начальное распределение специального вида может значительно изменять динамику переноса и формирование концентрационных градиентов.*

Ключевые слова: *гидродинамическая дисперсия, нестационарность, массоперенос.*

Явления переноса встречаются в теплотехнике, электротехнике, магнитной гидродинамике, теории фильтрации, гидрогеологии и многих других областях технической практики. Среди этих явлений можно выделить явление гидродинамической дисперсии, включающее в себя несколько видов массопереноса нейтрального индикатора при фильтрации жидкостей. Основные из них: молекулярная диффузия, т.е. микроскопическое смешивание, механическая дисперсия, т.е. перемешивание, вызванное сложным строением среды и геометрией потока, адсорбция, т.е. сложный массоперенос из жидкости на поверхности твердой фазы и некоторые другие.

Для математического описания явления гидродинамической дисперсии было предложено [1, 2] уравнение, которое в общей криволинейной системе координат может быть представлено в виде

$$\frac{\partial C}{\partial t} = div[DgradC - C\vec{\upsilon}] \quad (1)$$

В этом уравнении C – относительная концентрация переносимого фильтрационным потоком вещества, $\vec{\upsilon}$ – скорость потока, D – коэффициент гидродинамической дисперсии, который зависит от скорости течения и в общем случае является тензором второго ранга.

Из уравнения (1) могут быть получены различные его частные случаи [3, 7], учитывающие размерность модели переноса, стационарность или нестационарность процесса, а также вклад отдельных видов массопереноса в общий процесс дисперсии. Однако, число задач, решения которых получено в замкнутом виде ограничено из-за трудностей возникающих при получении общих решений соответствующих дифференциальных уравнений.

Имеющиеся экспериментальные исследования [4, 5] указывают на то, что в зависимости от значений критериальных чисел Пекле и Рейнольдса диапазон изменения скоростей течения можно разбить на несколько интервалов, в пределах которых доминируют отдельные виды массопереноса. В областях, где скорости течения значительные преобладает конвективный перенос, в уравнении (1) можно пренебречь производными второго порядка по координатами, и, тогда в цилиндрической системе координат для одномерного случая оно примет вид

$$\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial(rvC)}{\partial r}+n_0\frac{\partial C}{\partial t}=\frac{\partial N}{\partial t} \quad , \qquad (2)$$

здесь n_0 - пористость среды, N- концентрация вещества в твердой фазе.

Если предположить, что фильтрационное течение создается логарифмическим источником (стоком), т.е., $\upsilon=\mp\frac{Q_0}{2\pi Bn_0 r}$, где Q_0 – объемный расход жидкости, например дебет совершенной скважины, B – линейный размер источника (стока) или мощность фильтрационного пласта, то уравнение (2) для случая сходящегося течения при отсутствии адсорбции (N=const) примет вид:

$$\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial(C)}{\partial r}+\frac{n_0}{Q}\frac{\partial C}{\partial t}=0, \qquad (3)$$

$$Q=\frac{Q_0}{2\pi Bn_0}.$$

Следуя общей теории решения дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка [6], составим характеристическую систему уравнений

$$r\partial r=\frac{Qdt}{n_0}=\frac{C}{0} \qquad (4).$$

Характеристики (интегралы) системы C_1 =C и $r^2-\frac{2Q}{n_0}t=C_2$. Тогда общее решение уравнения (3) можно представить в виде

$$C(r,t)=\Phi(\psi), \quad \psi=r^2-\frac{2Q}{n_0}t \ , \qquad (5),$$

где $\Phi(\psi)$ - некоторая дифференцируемая функция переменных (r, t).

Для дифференциальных уравнений вида (3) возможна постановка задачи Коши [6], т.е. задание начальных условий вида $C(0,t)=\varphi(r)$. (6).

Учитывая вид общего решения уравнения (3) зададим начальное распределение выражением

$$\varphi(0,r)=Ar^{\alpha}e^{-\beta r} \ , \ (7).$$

Тогда решение поставленной задачи Коши с указанным начальным распределением будет иметь вид

$$C(r,t)=A\cdot\psi^{\frac{\alpha}{2}}\cdot e^{-\beta\psi^{\frac{1}{2}}} \ . \quad (8)$$

В этом выражении A, α и β – некоторые коэффициенты, причем A нормировочный коэффициент, а за счет произвольности коэффициентов α и β начальному распределению (7) можно придать требуемую форму.

Для иллюстрации сказанного удобно ввести безразмерные переменные [7] $\rho=\frac{r}{a}$ – безразмерные координаты, $\tau=\frac{Q}{a^2}t$ – безразмерное время, a – некоторый характерный линейный размер, например продольная дисперсионность [5].

В этих переменных постановка и решение задачи (3), (7), (8) могут быть представлены в следующем виде

$$\frac{\partial C}{\partial \tau} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial C}{\partial \rho}, \quad \tau \geq 0, \quad \rho \succ 0, \qquad (9)$$

$$C(0,\rho) = A\rho^{\alpha} e^{-\beta\rho} \qquad , \qquad (10)$$

$$C(\rho,\tau) = A\sqrt{(2\tau+\rho^2)^{\alpha}} \cdot e^{-\beta\sqrt{2\tau+\rho^2}} \quad . \qquad (11)$$

Исследование выражения (11) показывает, что максимум функции $C(\rho,\tau)$ в зависимости от τ находится в точке с координатой $\rho_{кр} = \sqrt{(\frac{\alpha}{\beta})^2 - 2\tau}$, (12)

максимальное значение функции (11) определяется по формуле $C_{\max} = A(\frac{\alpha}{\beta})^{\alpha} \cdot e^{-\alpha}$, т. е. остается постоянным до момента $\tau = \frac{1}{2}(\frac{\alpha}{\beta})^2$, (13), а скорость перемещения максимума (7) $\upsilon = \left[(\frac{\alpha}{\beta})^2 - 2\tau\right]^{-\frac{1}{2}}$ (14).

Рисунок 1 иллюстрирует динамику распределения концентрации с течением безразмерного времени τ .

Графики зависимости концентрации $C(\rho,\tau)$ построены при следующих значениях параметров: $\alpha = 12; \beta = 6;$ $A = (\frac{e}{2})^{12}$. Нормировочный коэффициент А выбран так, чтобы максимум концентрации начального распределения был равен 1.

Таким образом, для рассмотренного примера

$$C(\rho,\tau) = \left[\frac{1}{4}(2\tau+\rho^2) \cdot e^{2-\sqrt{2\tau+\rho^2}}\right]^6 . \qquad (15)$$

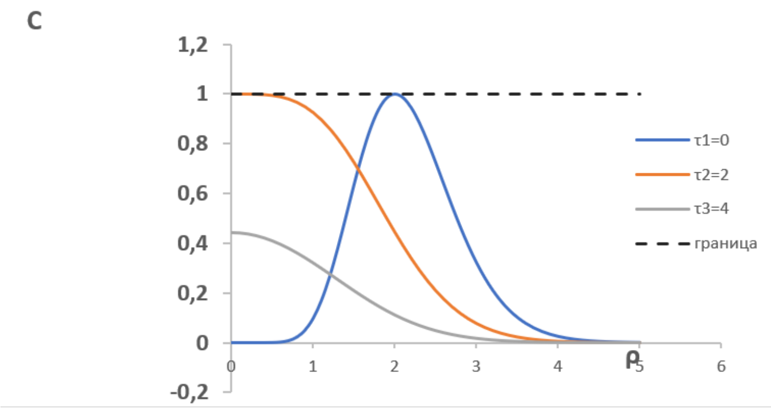

Рис. 1. Кривые распределения концентрации для различных моментов приведенного времени

Аналогичным образом можно получить решение задачи Коши уравнения (2) для некоторых моделей учитывающих растворение веществ, выпадение в осадок и кристаллизацию.

Например, в случае равновесной адсорбции [4]

$$\frac{\partial N}{\partial t} = n_0 \cdot \Gamma \frac{\partial C}{\partial t}, \qquad (16)$$

Γ - параметр изотермы массообмена Генри. В этом случае уравнение (2) приобретает вид

$$\frac{1}{\tau} \cdot \frac{\partial (r \cdot \upsilon \cdot C)}{\partial r} + n_0 (1 - \Gamma) \frac{\partial C}{\partial t} = 0 \qquad (17)$$

Решение задачи Коши для уравнения (17) аналогично приведенному выше и имеет вид (15). В этом случае достаточно заменить переменные τ на $\tau^I = \frac{\tau}{1-\Gamma}$. Полученные решения могут быть использованы для оценки параметров, характеризующих процесс массопереноса. Для этого необходимо создать соответствующее начальное распределение индикатора, зарегистрировать его на стоке фильтрационного течения и произвести замеры концентрации в различные моменты времени.

Библиографический список

1. Bachmet Y., Bear J., The general equations of hydrodynamic dispersion // J. Geophus. Res. – 1964. – Vol. 69. – P. 2561-2567.

2. Николаевский В.Н. Движение углеводородных смесей в пористой среде. – М.: Недра, 1968. – 267 с.

3. Куликов А.Н. Уравнение радиальной гидродинамической дисперсии и его общие интегралы. – В кн.: Движение растворимых примесей в фильтрационных потоках. – Тула, 1983. – С. 15-20.

4. Веригин Н.Н. Васильев С.В., Саркисян В.СЧ., Шержуков Б.С. Гидродинамические и физико-химические свойства черных пород. – М.: Недра, 1977. – 271 с.

5. Бэр Я., Заславский Д., Ирмей С. Физико-математические основы фильтрации воды. – М.: Мир, 1971. – 481 с.

6. Филиппов А.Ф., Сборник задач по дифференциальным уравнениям: Учебное пособие. Изд. 3-е. – М.: Книжный дом «Либроком», 20096. – 240 с.

7. Куликов А.Н., Казначеева И.В. Некоторые модели гидродинамической дисперсии в фильтрационном потоке специального вида. Научные труды Калужского государственного университета им. К.Э. Циолковского. – Калуга, 2016. – С. 239-240.

ABOUT ONE PROBLEM OF NON-STATIONARY CONVECTIVE TRANSPORT WITH AN INITIAL DISTRIBUTION OF A SPECIAL TYPE

A.N. Kulikov[1], *Candidate of Physics and Mathematics Sciences, Associate Professor*
I.V. Kaznacheeva[2], *Candidate of Technical Sciences, teacher of the highest qualification category*
[1]Kaluga State University named after K.E. Tsiolkovsky
[2]Lyceum № 48, Kaluga
(Russia, Kaluga)

Abstract. *The article is a study of the problem of hydrodynamic dispersion, including some types of mass transfer of a neutral indicator during the filtration of liquids. The purpose of the study is to determine the influence of the initial distribution on the mass transfer process and to identify the features of its dynamics. In the article, solutions to special cases of the Cauchy problem are obtained for some models that take into account the dissolution of substances. The authors note that the initial distribution of a special species can significantly change the transport dynamics and the formation of concentration gradients.*

Keywords: *hydrodynamic dispersion, nonstationarity, mass transfer.*