

ОДНОРОДНОСТЬ МАГНИТНОГО ПОЛЯ СИСТЕМЫ КРУГЛЫХ И КВАДРАТНЫХ ПРОВОДНИКОВ С ТОКОМ

Л.А. Фишбейн, канд. физ.-мат. наук, доцент

Уральский государственный университет путей сообщений
(Россия, г. Екатеринбург)

DOI:10.24412/2500-1000-2023-10-2-208-215

Аннотация. Проведено сравнение магнитного поля системы двух соосных эквивалентных круглых и квадратных проводников с током в рабочей области систем – пространстве между проводниками. Показано, что минимальная неоднородность магнитного поля порядка одного процента достигается как вдоль оси симметрии, так и в центре систем в плоскости, перпендикулярной оси. Установлено, что однородность магнитного поля в рабочей области пространства систем круглых и квадратных проводников с током приблизительно одинакова.

Ключевые слова: однородность магнитного поля, кольца Гельмгольца, квадратные проводники.

Проблема получения высокооднородных магнитных полей интересна сама как сама по себе, так и для применения магнитных полей с целью калибровки большого количества технических устройств, для проведения различных физических и биофизических экспериментов. Простейшими системами для получения достаточно однородного постоянного или переменного магнитного поля с открытым доступом для образцов произвольной формы являются системы круглых и квадратных проводников с током. Однородность магнитных полей данных типов проводников

вдоль оси симметрии была изучена в работах [6]. В данной статье мы сравниваем однородность магнитного поля во всем пространстве между проводниками.

Магнитное поле круглых и квадратных проводников с током

Следуя [1, 2], рассмотрим магнитное поле в цилиндрической системе координат (z, ρ, φ) двух соосных круглых проводников (рис. 1а) радиусом R , током I , на расстоянии $2l$ друг от друга в безразмерных переменных

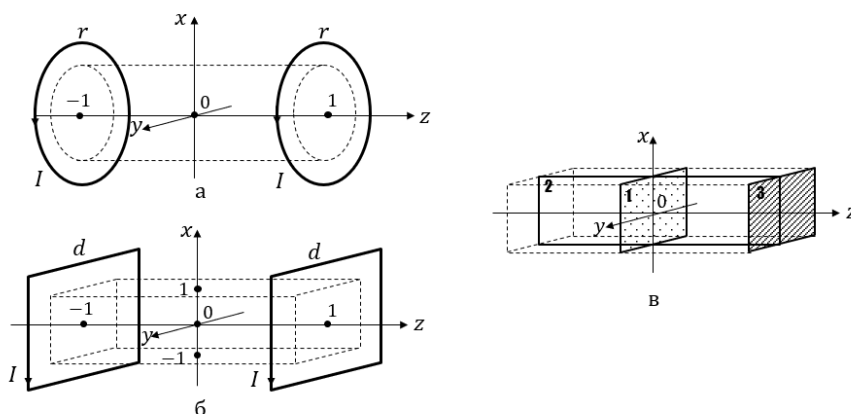


Рис. 1. Система двух соосных эквивалентных круглых (а) и квадратных (б) проводников с током. Область расчета (в) – рабочая область системы квадратных проводников с током

$$x = \frac{X}{l}, y = \frac{Y}{l}, z = \frac{Z}{l}, \rho = \frac{\sqrt{X^2 + Y^2}}{l}, r = \frac{R}{l}, d = \frac{a}{2l} \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
 B_z(z, \rho, r) = \sqrt{B_z^2(z, \rho, r) + B_\rho^2(z, \rho, r) + B_\varphi^2(z, \rho, r)} \\
 B_z(z, \rho, r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi l} F_2(z, \rho, r), \quad B_\rho(z, \rho, r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi l} T_2(z, \rho, r), \quad B_\varphi = 0, \\
 F_2(z, \rho, r) = F_{21}(z, \rho, r) + F_{22}(z, \rho, r), \quad T_2(z, \rho, r) = T_{21}(z, \rho, r) + T_{22}(z, \rho, r), \\
 F_{21}(z, \rho, r) = \frac{K(m_1(z, \rho, r)) + \frac{r^2 - \rho^2 - (z+1)^2}{(r-\rho)^2 + (z+1)^2} E(m_1(z, \rho, r))}{\sqrt{(r+\rho)^2 + (z+1)^2}}, \\
 F_{22}(z, \rho, r) = \frac{K(m_2(z, \rho, r)) + \frac{r^2 - \rho^2 - (z-1)^2}{(r-\rho)^2 + (z-1)^2} E(m_2(z, \rho, r))}{\sqrt{(r+\rho)^2 + (z-1)^2}}, \\
 T_{21}(z, \rho, r) = \frac{z+1}{\rho} \frac{-K(m_1(z, \rho, r)) + \frac{r^2 + \rho^2 + (z+1)^2}{(r-\rho)^2 + (z+1)^2} E(m_1(z, \rho, r))}{\sqrt{(r+\rho)^2 + (z+1)^2}}, \\
 T_{22}(z, \rho, r) = \frac{z-1}{\rho} \frac{-K(m_2(z, \rho, r)) + \frac{r^2 + \rho^2 + (z-1)^2}{(r-\rho)^2 + (z-1)^2} E(m_2(z, \rho, r))}{\sqrt{(r+\rho)^2 + (z-1)^2}}, \\
 0 \leq m_1(z, \rho, r) = \frac{4r\rho}{(r+\rho)^2 + (z+1)^2} \leq 1, \quad 0 \leq m_2(z, \rho, r) = \frac{4r\rho}{(r+\rho)^2 + (z-1)^2} \leq 1, \\
 K(m) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\beta}{\sqrt{1 - m \sin^2 \beta}}, \quad E(m) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - m \sin^2 \beta} \, d\beta.
 \end{array} \right. \quad (2)$$

Здесь $K(m)$ и $E(m)$ – эллиптические интегралы 1 и 2 рода. Для случая $\rho = 0$ имеем [16]

$$\begin{aligned}
 B_z(z, 0, r) &= \frac{\mu_0 I}{2l} r^2 \frac{1}{[r^2 + (z+1)^2]^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{[r^2 + (z-1)^2]^{\frac{3}{2}}}, \\
 B_\rho(0, 0, r) &= 0, \quad B_z(0, 0, r) = B_0(r) = \frac{\mu_0 I}{l} r^2 \frac{1}{(r^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}.
 \end{aligned}$$

Пусть рабочая область определяется неравенствами

$$0 \leq \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1, \quad -1 \leq z \leq 1. \quad (3)$$

Раскладывая проекции вектора магнитной индукции в ряд по пространственным переменным в центральной точке, потребуем, чтобы вторая производная равнялась

нулю. Такие системы принято называть системами Гельмгольца. Равенство нулю производной соответствует значению

$$r = r_0 = 2. \quad (4)$$

Все нечетные производные равны нулю из-за симметрии системы [2]. Таким образом, разложение в ряд Тейлора начинается с производной 4 порядка (кроме нулевой).

Такую систему называют системой 4 порядка [3].

Следуя [18], рассмотрим магнитное поле в декартовой системе координат (x, y, z) двух соосных квадратных проводников

(рис. 16) со стороны a , током I , на расстоянии $2l$ друг от друга в безразмерных переменных (1)

$$B(x, y, z, d) = \sqrt{B_x^2(x, y, z, d) + B_y^2(x, y, z, d) + B_z^2(x, y, z, d)}, \quad (5)$$

$$B_x(x, y, z, d) = \frac{\mu_0 I}{4\pi l} \sum_{i=1}^8 B_{xi}(x, y, z, d),$$

$$B_{x1}(x, y, z, d) = \frac{(y+d)(z-1)}{[(x-d)^2 + (z-1)^2] \sqrt{(x-d)^2 + (y+d)^2 + (z-1)^2}},$$

$$B_{x2}(x, y, z, d) = -\frac{(y+d)(z-1)}{[(x+d)^2 + (z-1)^2] \sqrt{(x+d)^2 + (y+d)^2 + (z-1)^2}},$$

$$B_{x3}(x, y, z, d) = \frac{(y-d)(z-1)}{[(x+d)^2 + (z-1)^2] \sqrt{(x+d)^2 + (y-d)^2 + (z-1)^2}},$$

$$B_{x4}(x, y, z, d) = -\frac{(y-d)(z-1)}{[(x-d)^2 + (z-1)^2] \sqrt{(x-d)^2 + (y-d)^2 + (z-1)^2}},$$

$$B_{x5}(x, y, z, d) = \frac{(y+d)(z+1)}{[(x-d)^2 + (z+1)^2] \sqrt{(x-d)^2 + (y+d)^2 + (z+1)^2}},$$

$$B_{x6}(x, y, z, d) = -\frac{(y+d)(z+1)}{[(x+d)^2 + (z+1)^2] \sqrt{(x+d)^2 + (y+d)^2 + (z+1)^2}},$$

$$B_{x7}(x, y, z, d) = \frac{(y-d)(z+1)}{[(x+d)^2 + (z+1)^2] \sqrt{(x+d)^2 + (y-d)^2 + (z+1)^2}},$$

$$B_{x8}(x, y, z, d) = -\frac{(y-d)(z+1)}{[(x-d)^2 + (z+1)^2] \sqrt{(x-d)^2 + (y-d)^2 + (z+1)^2}},$$

$$B_y(x, y, z, d) = \frac{\mu_0 I}{4\pi l} \sum_{i=1}^8 B_{yi}(x, y, z, d),$$

$$B_{y1}(x, y, z, d) = \frac{(x+d)(z-1)}{[(y-d)^2 + (z-1)^2] \sqrt{(x+d)^2 + (y-d)^2 + (z-1)^2}},$$

$$B_{y2}(x, y, z, d) = -\frac{(x+d)(z-1)}{[(y+d)^2 + (z-1)^2] \sqrt{(x+d)^2 + (y+d)^2 + (z-1)^2}},$$

$$B_{y3}(x, y, z, d) = \frac{(x-d)(z-1)}{[(y+d)^2 + (z-1)^2] \sqrt{(x-d)^2 + ((y+d)^2 + (z-1)^2)}},$$

$$B_{y4}(x, y, z, d) = -\frac{(x-d)(z-1)}{[(y-d)^2 + (z-1)^2] \sqrt{(x-d)^2 + (y-d)^2 + (z-1)^2}},$$

$$B_{y5}(x, y, z, d) = \frac{(x+d)(z+1)}{[(y-d)^2 + (z+1)^2] \sqrt{(x+d)^2 + (y-d)^2 + (z+1)^2}},$$

$$B_{y6}(x, y, z, d) = -\frac{(x+d)(z+1)}{[(y+d)^2 + (z+1)^2] \sqrt{(x+d)^2 + (y+d)^2 + (z+1)^2}},$$

$$B_{y7}(x, y, z, d) = \frac{(x-d)(z+1)}{[(y+d)^2 + (z+1)^2] \sqrt{(x-d)^2 + (y+d)^2 + (z+1)^2}},$$

$$B_{y8}(x, y, z, d) = -\frac{(x-d)(z+1)}{[(y-d)^2 + (z+1)^2] \sqrt{(x-d)^2 + (y-d)^2 + (z+1)^2}},$$

$$B_z(x, y, z, d) = \frac{\mu_0 I}{4\pi l} \sum_{i=1}^{16} B_{zi}(x, y, z, d),$$

$$B_{z1}(x, y, z, d) = \frac{(x+d)(y+d)}{[(y+d)^2 + (z-1)^2] \sqrt{(x+d)^2 + (y+d)^2 + (z-1)^2}}$$

$$B_{z2}(x, y, z, d) = \frac{(x+d)(y+d)}{[(x+d)^2 + (z-1)^2] \sqrt{(x+d)^2 + (y+d)^2 + (z-1)^2}}$$

$$B_{z3}(x, y, z, d) = -\frac{(x+d)(y-d)}{[(y-d)^2 + (z-1)^2] \sqrt{(x+d)^2 + (y-d)^2 + (z-1)^2}}$$

$$B_{z4}(x, y, z, d) = -\frac{(x+d)(y-d)}{[(x+d)^2 + (z-1)^2] \sqrt{(x+d)^2 + (y-d)^2 + (z-1)^2}}$$

$$B_{z5}(x, y, z, d) = -\frac{(x-d)(y+d)}{[(x-d)^2 + (z-1)^2] \sqrt{(x-d)^2 + (y+d)^2 + (z-1)^2}}$$

$$B_{z6}(x, y, z, d) = -\frac{(x-d)(y+d)}{[(y+d)^2 + (z-1)^2] \sqrt{(x-d)^2 + (y+d)^2 + (z-1)^2}}$$

$$B_{z7}(x, y, z, d) = \frac{(x-d)(y-d)}{[(x-d)^2 + (z-1)^2] \sqrt{(x+d)^2 + (y-d)^2 + (z-1)^2}}$$

$$B_{z8}(x, y, z, d) = \frac{(x+d)(y+d)}{[(y-d)^2 + (z-1)^2] \sqrt{(x-d)^2 + (y-d)^2 + (z-1)^2}}$$

$$B_{z9}(x, y, z, d) = \frac{(x+d)(y+d)}{[(y+d)^2 + (z+1)^2] \sqrt{(x+d)^2 + (y+d)^2 + (z+1)^2}}$$

$$B_{z10}(x, y, z, d) = \frac{(x+d)(y-d)}{[(x+d)^2 + (z+1)^2] \sqrt{(x+d)^2 + (y+d)^2 + (z+1)^2}}$$

$$B_{z11}(x, y, z, d) = -\frac{(x+d)(y-d)}{[(y-d)^2 + (z+1)^2] \sqrt{(x+d)^2 + (y-d)^2 + (z+1)^2}}$$

$$B_{z12}(x, y, z, d) = -\frac{(x-d)(y+d)}{[(x+d)^2 + (z+1)^2] \sqrt{(x+d)^2 + (y-d)^2 + (z+1)^2}}$$

$$B_{z13}(x, y, z, d) = -\frac{(x-d)(y+d)}{[(x-d)^2 + (z+1)^2] \sqrt{(x-d)^2 + (y+d)^2 + (z+1)^2}}$$

$$B_{z14}(x, y, z, d) = -\frac{(x-d)(y-d)}{[(y+d)^2 + (z+1)^2] \sqrt{(x-d)^2 + (y+d)^2 + (z+1)^2}}$$

$$B_{z15}(x, y, z, d) = \frac{(x-d)(y-d)}{[(x-d)^2 + (z+1)^2] \sqrt{(x+d)^2 + (y-d)^2 + (z+1)^2}}$$

$$B_{z16}(x, y, z, d) = \frac{(x-d)(y-d)}{[(y-d)^2 + (z+1)^2] \sqrt{(x-d)^2 + (y-d)^2 + (z+1)^2}}$$

Для случая $x = y = 0$ [18, 19] имеем

$$B_z(0,0,z,d) = \frac{2\mu_0 I}{\pi l} d^2 \left[\frac{1}{((z+1)^2 + d^2) \sqrt{(z+1)^2 + 2d^2}} + \frac{1}{((z-1)^2 + d^2) \sqrt{(z-1)^2 + 2d^2}} \right],$$

$$B_x(0,0,0,d) = B_y(0,0,0,d) = 0, B_z(0,0,0,d) = B_0(d) = \frac{4\mu_0 I}{\pi l} \frac{d^2}{(1+d^2)\sqrt{1+2d^2}}$$

Пусть рабочая область определяется неравенствами

$$-1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1, -1 \leq z \leq 1. \quad (6)$$

Раскладывая проекции вектора магнитной индукции в ряд по пространственным переменным в центральной точке, потребуем, чтобы вторая производная равнялась

$$d = d_0 \approx 1.837. \quad (7)$$

Все нечетные производные равны нулю из-за симметрии системы. Таким образом, разложение в ряд Тейлора начинается с производной 4 порядка (кроме нулевой), и эта система также является системой 4 порядка.

Сравнение неоднородности магнитных полей систем проводников с током

$$h_c(x, y, z) = 1 - \frac{B(z, \sqrt{x^2 + y^2}, r_0)}{B_0(r_0)}, \quad h_s(x, y, z) = 1 - \frac{B(x, y, z, d_0)}{B_0(d_0)}. \quad (8)$$

Чем меньше модуль значения $h(x, y, z)$, тем более однородным является магнитное поле. Полностью однородное магнитное поле имеет значение $h = 0$ во всей области пространства. Если $h(x, y, z) > 0$, то модуль вектора магнитной индукции в данной точке пространства меньше, чем в центральной $x = y = z = 0$. Если

нулю. Это приводит к кубическому уравнению [5, 6], решением которого является значение

Введем коэффициент неоднородности магнитного поля, сравнивая его значение в произвольной точке со значением в центре системы. Расчеты показывают, что проекции B_x и B_y малы. Поэтому магнитное поле с большой точностью направлено вдоль оси z . Для круглых (с) и квадратных (s) проводников имеем, соответственно, выражения:

$h(x, y, z) < 0$ – то больше. Будем сравнивать магнитные поля в рабочей области системы квадратных проводников с током. Область 1: $-1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1, z = 0$; область 2: $-1 \leq x \leq 1, y = 0, -1 \leq z \leq 1$; область 3: $-1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1, z = 1$.

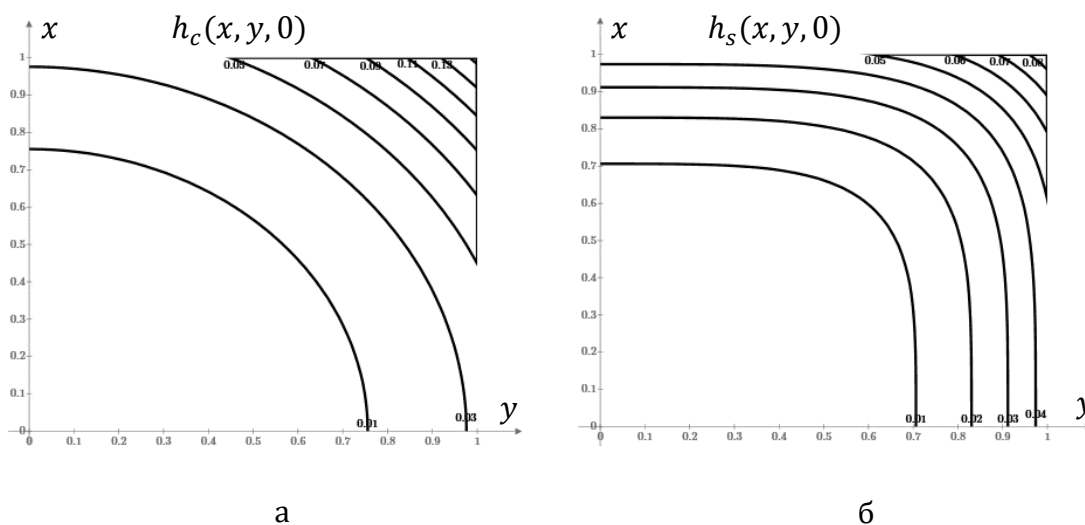


Рис. 2. Изолинии одинаковых значений коэффициента неоднородности в области 1 ($z = 0$): а – система круглых проводников с током, б – система квадратных проводников с током. Показана четвертая часть области.

На рисунке 2 построенные изолинии значений коэффициентов неоднородности располагаются или в виде концентрических окружностей (круглые проводники), или в виде концентрических овалов (квадратные проводники) вокруг центральной точки области $x = 0, y = 0, z = 0$, где коэффициенты неоднородности равны нулю. С увеличением расстояния до центра коэффициенты неоднородности растут (однородность падает) приблизительно одинаковым образом, изменяясь для круглых и квадратных проводников от значения $h_c(0,0,0) = h_s(0,0,0) = 0$ до значений $h_c(1,1,0) = 0.156$ и $h_s(1,1,0) = 0.087$, соответственно.

Пространственные распределения коэффициентов неоднородности (рис. 3) для обоих типов проводников с током имеют достаточно похожий вид. Неоднородность растет как по мере удаления вдоль оси z от нулевого значения, так и по мере удаления от нулевого значения вдоль оси x . При этом для всех $x > 0$ существует значение $z \neq 0$, где магнитное поле совпадает с

центральным, т.е. кривая пересекает ось z . Для $z = 1$ в обоих случаях это имеет место для $x \approx 0.7$.

На рисунке 4 построенные изолинии значений коэффициентов неоднородности располагаются (также как и на рисунке 2) или в виде концентрических окружностей (круглые проводники) или в виде концентрических овалов (квадратные проводники) вокруг центральной точки области $x = 0, y = 0, z = 1$. Однако коэффициенты неоднородности равны нулю приблизительно в точках с координатами $x^2 + y^2 \approx 0.7^2, z = 1$, а не в центральной точке, что соответствует рисунку 3. С увеличением расстояния до указанной выше кривой модули коэффициентов неоднородности растут (однородность падает) приблизительно одинаковым образом, изменяясь для круглых и квадратных проводников от значения $h_c(0,0,1) = 0.054$ и $h_s(0,0,1) = 0.054$, через ноль до значений $h_c(1,1,1) = -0.380$ и $h_s(1,1,1) = -0.246$, соответственно.

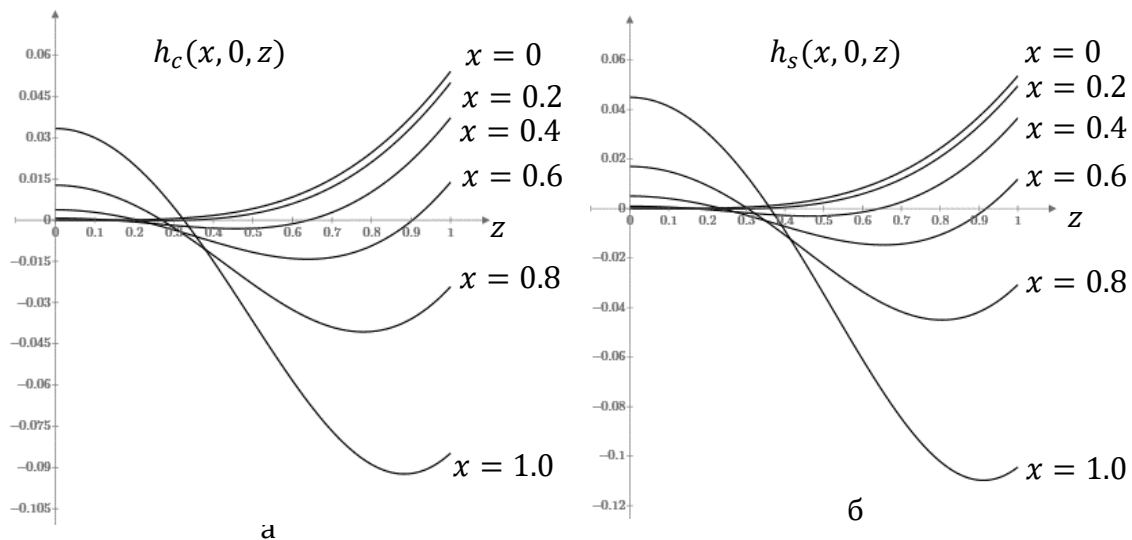


Рис. 3 Пространственное распределение коэффициента неоднородности вдоль оси z для разных значений x (область 2): а – система круглых проводников с током, б – система квадратных проводников с током. Показана четвертая часть области.

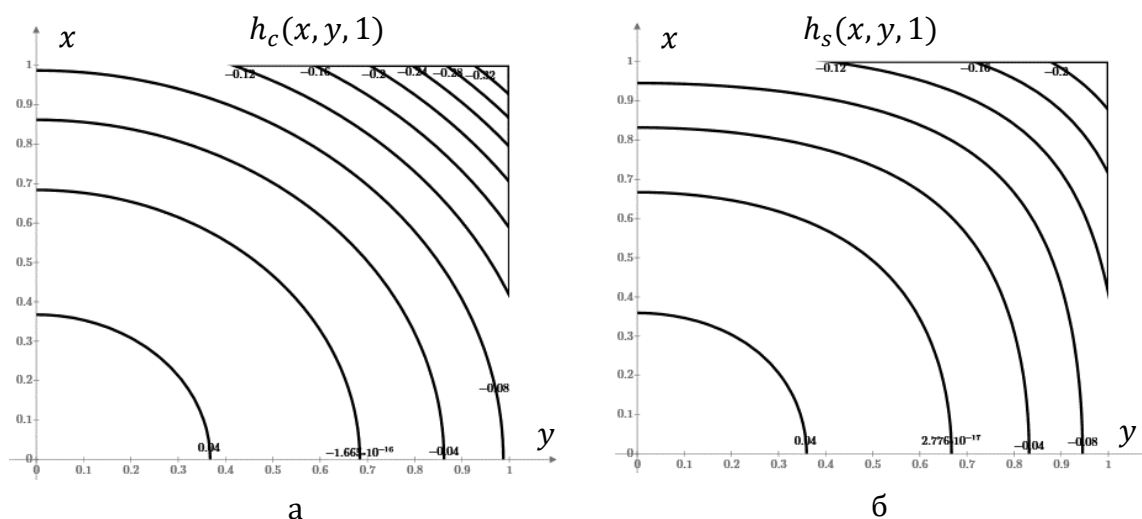


Рис. 4. Изолинии одинаковых значений коэффициента неоднородности в области Σ ($z = 1$): а – система круглых проводников с током, б – система квадратных проводников с током. Показана четвертая часть области.

Заключение

Таким образом, однородности магнитных полей круглых и квадратных систем проводников с током приблизительно одинаковы в пространстве между ними. При этом магнитное поле наиболее однородно как вдоль оси z , так и в плоскости

$z = 0$. В этих областях неоднородность составляет порядка 0.01. Для получения более однородных полей необходимо использовать системы проводников с током с большим числом проводников.

Библиографический список

1. Смайт В. Электростатика и электродинамика. – М.: Иностранная литература, 1954. – 604 с.
2. Fishbein L.A. On the possibility of creating a magnetic field with a given degree of spatial inhomogeneity // Rev Sci Instrum. 2021 Jun 1;92(6):064705. DOI: 10.1063/5.0040871.
3. Caprari R.S. Meas. Sci. Technol. 6, 593 (1995).
4. Li, T.T. Tri-axial square Helmholtz coil for neutron EDM experiment. The Chinese University of Hong Kong, Hong Kong, China, 2004.
5. Фишбейн, Л.А. Магнитные поля системы двух соосных квадратных и круглых соленоидов / Л.А. Фишбейн // Применение информационных технологий и математического моделирования при решении исследовательских задач: Сборник научных трудов / Под научной редакцией Г.А. Тимофеевой, О.В. Куликовой. Том Выпуск 5 (253). – Екатеринбург: Уральский государственный университет путей сообщения, 2023. – С. 149-157. – EDN FGYFKE.
6. Restrepo A.F., Franco E., Cadavid H., Pinedo C.R. (2017). A comparative study of the magnetic field homogeneity for circular, square and equilateral triangular helmholtz coils // International Conference on Electrical, Electronics, Communication, Computer, and Optimization Techniques (ICEECCOT). DOI: 10.1109/ICEECCOT.2017.8284514

UNIFORMITY OF THE MAGNETIC FIELD OF A SYSTEM OF ROUND AND SQUARE CONDUCTORS CARRYING CURRENT

L.A. Fishbein, *Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor*
Ural State Transport University
(Russia, Ekaterinburg)

***Abstract.** A comparison was made of the magnetic field of a system of two coaxial equivalent round and square conductors with the current in the working area of the systems – the space between the conductors. It is shown that a minimum magnetic field inhomogeneity of the order of one percent is achieved both along the axis of symmetry and in the center of the systems in a plane perpendicular to the axis. It has been established that the uniformity of the magnetic field in the working space of systems of round and square conductors carrying current is approximately the same.*

***Keywords:** magnetic field uniformity, Helmholtz rings, square conductors.*