

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В ТРЕХКОМПОНЕНТНЫХ СЛОИСТЫХ ФОНОННЫХ КРИСТАЛЛАХ

Д.А. Маглицов, аспирант
Новосибирский государственный университет
(Россия, г. Новосибирск)

DOI:10.24412/2500-1000-2023-9-1-281-288

Аннотация. Данная исследовательская работа фокусируется на математическом моделировании явлений распространения волн в неоднородных средах. В рамках одномерного приближения были изучены характеристики волноводов и резонансов в неоднородных одномерно-периодических структурах, состоящих из трех различных компонентов. Для описания динамики акустических волн в таких структурах были применены стационарные уравнения колебаний давления в среде и соответствующие граничные условия, которые включают в себя условия непрерывности для давления и скорости.

В результате данного исследования было обнаружено аналитическое решение для фундаментальной ячейки. Также были выявлены полосы пропускания для различных волноводных мод и получено дисперсионное соотношение, описывающее характер волновых мод в структурах данного типа. Кроме того, была определена зависимость частоты волновода от линейных концентраций материалов в фундаментальной ячейке.

Ключевые слова: акустические волны в неоднородных средах, полосы пропускания, фоновый кристалл, волноводные моды, дисперсионное соотношение, виброизолирующие и звукопоглощающие материалы.

Исследование распространения волн в различных средах началось еще в 17-м веке и продолжается и по сей день. Анализ этих явлений является важным инструментом для решения прикладных задач, связанных с неоднородными одномерными периодическими структурами. Среди сред, в которых акустические волны могут распространяться, можно выделить такие часто встречающиеся структуры, как пузырьки газа в жидкости, пенные материалы, смеси с периодически изменяющимися компонентами, разнообразные композиты, зернистые и пористые структуры, и другие подобные. То же самое относится и к электромагнитным волнам.

Структура «кварц-вода-воздух», исследуемая в данной работе, может служить примером пористого нефтяного или заводненного пласта. В рамках прикладных задач имеет важное значение определение полос пропускания и полос запираения, а также акустическое зондирование, позволяющее находить значения линейных концентраций на основе заданных фазовых скоростей. Кроме того, исследование свойств замедления в неоднородных од-

номерно-периодических структурах имеет важное практическое применение.

Данная работа берет свое начало в статьях С.В. Сухинина в области исследования акустики неоднородных сред. В данной работе [1,4] были использованы как основополагающие источники. В [2, 3] содержатся результаты первоначальных исследований, а также приведена библиография. В нашем исследовании, изложенном в работе [4], был проведен анализ характеристик волноводов и резонансных свойств гетерогенных проницаемых одномерно-периодических структур, состоящих из двух различных материалов, с использованием одномерного приближения. В результате исследования были выявлены полосы пропускания и полосы запираения, а также получено дисперсионное соотношение, описывающее характер волноводных моделей. Для моно- и полидисперсных сред были найдены четкие выражения для низких волноводных частот и соответствующих фазовых скоростей волноводных моделей. Существует несколько исследований, показывающих, что гетерогенные многокомпонентные композиты

могут иметь многообещающие виброизолирующие и звукопоглощающие свойства (см., например, [5]). Основываясь на результатах работ [6, 7], виброизоляция и эффективность защиты звука иллюстрируется путем изучения распространения волны в пористой среде заполненной жидкостью и газом.

Исследования, проведенные в данной работе, можно сказать, что обобщают результаты вышеуказанных работ. Особенность изучения трёхкомпонентной среды – увеличение вычислительной трудности, т.к. с ростом количества границ между средами фундаментальной ячейки увеличивается и количество уравнений, и количество свободных параметров. Как цель текущей работы рассматривается исследовать свойства трёхкомпонентной структуры неоднородностей и решить обратную задачу нахождения концентрации компонентов по измеренным значениям фазовых

скоростей. Результаты исследования могут быть использованы для получения новых композиционных материалов, звукоизоляционных фильтров, улучшению демпфирующих устройств и материалов.

Модель и свойства симметрии

В распространении волн в одномерных периодических структурах существует важное свойство: волной считается фазовое распространение колебаний в фундаментальных ячейках. Однако из-за большого числа неоднородностей возникают значительные трудности, которые делают невозможным использование прямых методов для изучения распространения волн в таких неоднородных периодических структурах. Поэтому анализ структуры частотного спектра в задаче, описывающей колебания в одномерно-периодических структурах, приобретает важное значение и становится ключевым аспектом исследований.

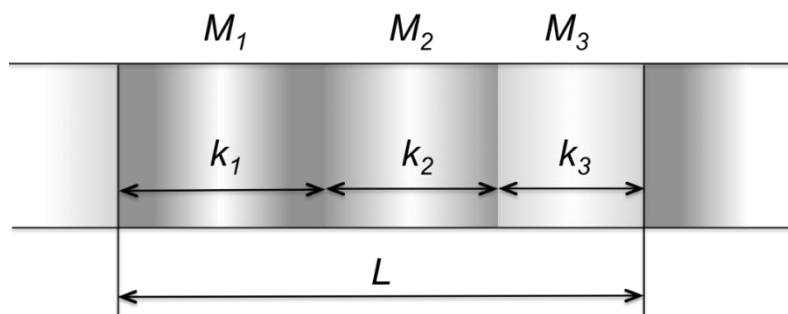


Рис. 1. Монодисперсная цепочка неоднородностей

Пусть одномерная периодическая среда (гетерогенная), представленная на рисунке 1, составлена из трёх сред - $M_1 = \{c_1, \rho_1\}$, $M_2 = \{c_2, \rho_2\}$ и $M_3 = \{c_3, \rho_3\}$, где ρ_i – плотность среды, c_i – скорость звука при покое. Допустим, что цепочка неоднородностей, состоящей из компонентов M_1 и M_2 , заполняет компонент M_3 (матрица композита), а линейная концентрация связанных слоев компонентов равна k_1 , k_2 и k_3 соответственно, причем считаем, что $k_1 + k_2 + k_3 = 1$. Индексы $i = 1, 2, 3$ соответствуют средам M_1 , M_2 , M_3 соответственно. В дальнейшем предполагаем, что плотности сред удовлетворяют соотношению $\rho_1 > \rho_2 > \rho_3$. Эта цепочка является пространственно-периодической, в которой наименьший пространственный пери-

од равен L . Будет рассматриваться безразмерную переменную по пространству $\hat{x} = x/L$, в дальнейших рассуждениях крышку опустим для простоты описания. Используя такие обозначения получаем, что наименьший пространственный период равен 1. Среда, имеющая такую длину, называется фундаментальной ячейкой. Также введем вспомогательные параметры $\tau_{ij} = \rho_i/\rho_j$, которые будут показателем отношения плотностей для соседних слоев, и $\kappa_{ij} = c_i/c_j$ как отношений скоростей звука в соседних слоях. Стоит отметить, что цепочка, которая состоит из трёх различных сред, имеет свойство пространственной периодичности. Дальнейшие вы-

числения проводятся в безразмерных переменных.

Стационарные акустические колебания давления с круговой частотой ω в средах

M_1, M_2, M_3 , описываются следующими уравнениями (Гельмгольца):

$$p_{xx}^{(1)} + \Omega^2 p^{(1)} = 0, p_{xx}^{(2)} + \Omega^2 \kappa_{12}^2 p^{(2)} = 0, p_{xx}^{(3)} + \Omega^2 \kappa_{13}^2 p^{(2)} = 0, \quad (1)$$

где $p^{(1)}, p^{(2)}$ и $p^{(3)}$ акустические давления в соответствующих компонентах цепочки, $\omega = 2\pi f$ – угловая частота, $\Omega = \frac{\omega L}{c_1}$ – волноводная частота, являющаяся безразмерной частотой колебаний. Для каждой из сред имеется общий вид решения, которое может быть выражено следующим образом:

$$\begin{aligned} p^{(1)} &= a_1 e^{i\Omega x} + b_1 e^{-i\Omega x}, p^{(2)} = a_2 e^{i\Omega \kappa_{12} x} + b_2 e^{-i\Omega \kappa_{12} x}, \\ p^{(3)} &= a_3 e^{i\Omega \kappa_{13} x} + b_3 e^{-i\Omega \kappa_{13} x} \end{aligned} \quad (2)$$

Условия на границе контакта компонентов являются непрерывность давления и скорости (нормальной компоненты) – два типа граничных условий:

$$\begin{aligned} p^{(1)} &= p^{(2)}, & \tau_{21} p_x^{(1)} &= p_x^{(2)}, \\ p^{(2)} &= p^{(3)}, & \tau_{32} p_x^{(2)} &= p_x^{(3)}, \\ p^{(3)} &= p^{(1)}, & \tau_{13} p_x^{(3)} &= p_x^{(1)}. \end{aligned} \quad (3)$$

Указанные выше уравнения (1), (2) и (3), обозначаемые как задача T , предоставляют полное описание распространения акустических волн в неоднородных одномерно-периодических структурах.

Свойства симметрии. В силу инвариантности волнового уравнения относительно локальных плоских симметрий, симметрия задачи T идентифицируется симметрией последовательности неоднородностей. По определению, все одномерно-периодические структуры допускают группу $\{T\}$, следовательно пространство допустимых решений раскладывается на инвариантные подпространства [2]. Так как гетерогенная цепочка неоднородностей имеет свойство пространственной пе-

риодичности, её можно отнести к фоновым кристаллам (по определению). А как известно, инварианты относительно группы $\{T\}$ по пространственной переменной все кристаллографические группы. Соответственно, по свойству коммутативности $\{T\}$ получаем, что её любое представление унитарно и одномерно в пространстве допустимых решений, поэтому можем его разложить на инвариантные одномерные подпространства. Мощность множества инвариантных полученных подпространств бесконечна. Рассматривая свойства симметрии среды, решение задачи удовлетворяет теореме Флоке (условия сдвига фазы колебаний):

$$p(x+1) = p(x)e^{i\xi}, \quad (4)$$

где i – мнимая единица, ξ – сдвиг фазы колебаний в стоящих рядом частях группы трансляций, $-\pi < \xi < \pi$. В дальнейших рассуждениях задача T совместно с (4) называется задача $T(\xi)$.

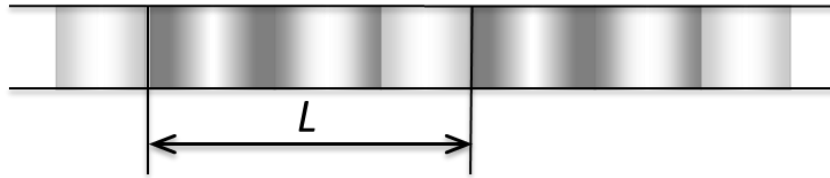


Рис. 2. Фундаментальная ячейка в цепочке неоднородностей.

Исследуя задачу $T(\xi)$ в одной фундаментальной ячейке цепочки трансляций, к примеру, на промежутке $0 < x < 1$ и продолжая решение с единичного интервала на всю прямую, получится решение.

Для каждого из слоёв M_1, M_2, M_3 , по предположению, линейные концентрации равны k_1, k_2, k_3 соответственно. Чаще всего встречающимися и являющимися

наиболее общим случаем – свойство монодисперсности цепочки неоднородностей. В текущей задаче монодисперсность выражается в условии $k_1 = k_2 = k_3 = \frac{1}{3}$.

Учитывая общий вид решений (2), получаем, что в фундаментальной ячейке граничные условия будут выражены следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} a_1 e^{i\Omega k_1} + b_1 e^{-i\Omega k_1} &= a_2 e^{i\Omega k_1 \kappa_{12}} + b_2 e^{-i\Omega k_1 \kappa_{12}} \\ a_2 e^{i\Omega(k_1+k_2)\kappa_{12}} + b_2 e^{-i\Omega(k_1+k_2)\kappa_{12}} &= a_3 e^{i\Omega(k_1+k_2)\kappa_{13}} + b_3 e^{-i\Omega(k_1+k_2)\kappa_{13}} \\ \tau_{21}(a_1 e^{i\Omega k_1} - b_1 e^{-i\Omega k_1}) &= \kappa_{12}(a_2 e^{i\Omega k_1 \kappa_{12}} + b_2 e^{-i\Omega k_1 \kappa_{12}}) \\ \tau_{32}\kappa_{12}(a_2 e^{i\Omega(k_1+k_2)\kappa_{12}} + b_2 e^{-i\Omega(k_1+k_2)\kappa_{12}}) &= \kappa_{13}(a_3 e^{i\Omega(k_1+k_2)\kappa_{13}} + b_3 e^{-i\Omega(k_1+k_2)\kappa_{13}}) \end{aligned}$$

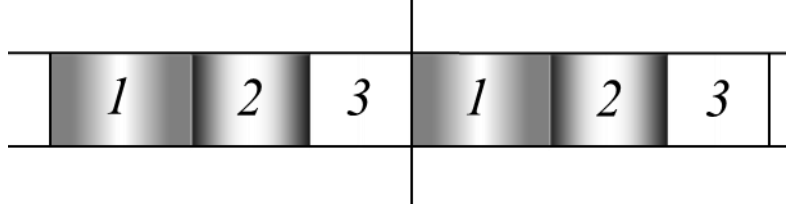


Рис. 3. Граница двух фундаментальных ячеек

Изменения вида кинематических и динамических условий на границе двух фундаментальных ячеек происходят из-за учета условий сдвига фазы колебаний.

$$\begin{aligned} a_3 e^{i\Omega \kappa_{13}} + b_3 e^{-i\Omega \kappa_{13}} &= a_1 e^{i\xi} + b_1 e^{-i\xi} \\ \tau_{13}\kappa_{13}(a_3 e^{i\Omega \kappa_{13}} - b_3 e^{-i\Omega \kappa_{13}}) &= a_1 e^{i\xi} - b_1 e^{-i\xi} \end{aligned}$$

В общем виде можно переписать свойств для соседних двух ячеек так:

$$\begin{aligned} p^{(3)}(1) &= p^{(1)}(0)e^{i\xi}, \\ \tau_{13}p_x^{(3)}(1) &= p_x^{(1)}(0)e^{i\xi} \end{aligned} \quad (4)$$

Дисперсионное соотношение. Объединяя в систему уравнения задачи $T(\xi)$ и уравнения (4) для сред M_1, M_2, M_3 получаем задачу $TM(\xi)$, которую можно записать в виде эквивалентной ей СЛУ $A(\Omega)Y = 0$, где $Y = (a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3)$ – вектор неизвестных констант в (2). Матрица $A(\Omega)$ этой системы имеет вид:

$$\begin{pmatrix} e^{i\Omega k_1} & e^{-i\Omega k_1} & -e^{i\Omega \kappa_{12} k_1} & -e^{i\Omega \kappa_{21} k_1} & 0 & 0 \\ \tau_{21} e^{i\Omega k_1} & -\tau_{21} e^{-i\Omega k_1} & -\kappa_{12} e^{i\Omega \kappa_{12} k_1} & \kappa_{21} e^{-i\Omega \kappa_{12} k_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\Omega \kappa_{12}(k_1+k_2)} & e^{-i\Omega \kappa_{12}(k_1+k_2)} & -e^{i\Omega \kappa_{13}(k_1+k_2)} & -e^{-i\Omega \kappa_{13}(k_1+k_2)} \\ 0 & 0 & \tau_{32}\kappa_{12} e^{i\Omega \kappa_{12}(k_1+k_2)} & -\tau_{32}\kappa_{12} e^{-i\Omega \kappa_{12}(k_1+k_2)} & -\kappa_{13} e^{i\Omega \kappa_{13}(k_1+k_2)} & \kappa_{13} e^{-i\Omega \kappa_{13}(k_1+k_2)} \\ -e^{i\xi} & -e^{-i\xi} & 0 & 0 & e^{i\Omega \kappa_{13}} & e^{-i\Omega \kappa_{13}} \\ -e^{i\xi} & e^{-i\xi} & 0 & 0 & \tau_{13}\kappa_{13} e^{i\Omega \kappa_{13}} & -\tau_{13}\kappa_{13} e^{i\Omega \kappa_{13}} \end{pmatrix}$$

Как известно, существует нетривиальное решение системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), когда определитель матрицы $A(\Omega)$ обращается в нуль. Из этого следует, что значения волнового числа, связанные с задачей ТМ, становятся нулями аналитической функции $\det A(\Omega)$. Следовательно, волновые значения $\Omega^*(\xi)$ в задаче ТМ на вещественной оси дискретны и непрерывно зависят от параметра ξ в

$$\begin{aligned} & 2\kappa_{12}\kappa_{13}(\cos(\xi) - \cos(k_1\Omega)\cos(k_2\Omega\kappa_{12}\cos(k_3\Omega\kappa_{13}))) \\ & + (\kappa_{12}^2\tau_{32} + \kappa_{13}^2\tau_{23})\cos(k_1\Omega)\sin(k_2\Omega\kappa_{12})\sin(k_3\Omega\kappa_{13}) \\ & + (\kappa_{13}^2\tau_{13} + \tau_{31})\kappa_{12}\sin(k_1\Omega)\cos(k_2\Omega\kappa_{12})\sin(k_3\Omega\kappa_{13}) \\ & + (\kappa_{12}^2\tau_{12} + \tau_{21})\kappa_{13}\sin(k_1\Omega)\sin(k_2\Omega\kappa_{12})\cos(k_3\Omega\kappa_{13}) = 0 \end{aligned}$$

Здесь использовалось равенство $k_3 = 1 - k_1 - k_2$ для лучшего понимания выражения. Видно, что k_1 и k_2 достаточно, чтобы описать зависимость волноводной частоты от концентраций сред.

Приближение длинных волн. Исключительным интересом обладает исследование распространения низкочастотных (длинноволновых) волн вдоль одномерно-периодической последовательности неоднородностей. В данном контексте наблюдается явление, при котором период структуры и размеры неоднородностей значительно меньше длины волны. Как

пределах множества $|\xi| < \pi$, а также от τ_{ij} и κ_{ij} .

При фиксированных значениях параметров τ_{ij} , κ_{ij} и k_i , уравнение $\det A(\Omega) = 0$ представляет собой дисперсионное соотношение для всех волноводных мод, обозначаемых как $\Omega^n = \Omega^n(\xi)$, $n = 1, 2, \dots$. Эти моды представляют собой связанные компоненты множества всех волноводных значений задачи ТМ на плоскости (ξ, Ω) .

было указано ранее, волноводные значения задачи ТМ представляют собой корни уравнения $\det A(\Omega) = 0$. При $\Omega \rightarrow 0$ волноводное значение соответствует Ω^1 , являющемуся волноводному значению задачи ТМ, ассоциированному с самой низкой частотой волновых колебаний в монодисперсной последовательности сред. Далее мы представим определение для такой моды колебаний.

Опр. Мода колебаний, которая соответствует самой низкой волноводной частоте, будет называться ползущей.

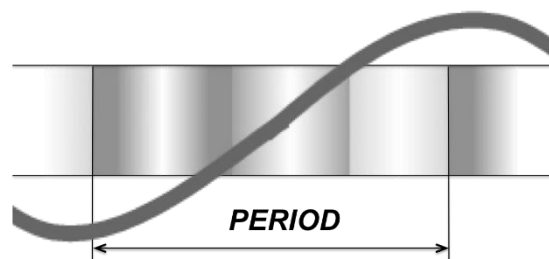


Рис. 4. Длинная (низкочастотная) волна.

Допуская разложение определителя матрицы, или дисперсионного соотношения, в задаче приближения ползущей моды, в ряд Тейлора в точке при $\Omega = 0$, и

$$2[\cos \xi - 1] + [k_1(k_1 + k_2\tau_{21} + k_3\tau_{31}) + k_2\kappa_{12}^2(k_1\tau_{12} + k_2 + k_3\tau_{32}) + k_3\kappa_{13}^2(k_1\tau_{13} + k_2\tau_{23} + k_3)]\Omega^2 = 0,$$

которое позволяет позволяет найти приближенное выражение для низких волновых частот ползущей моды несложным образом:

принебрегая слагаемыми порядка три (Ω^3) и выше, получаем разложение для низкочастотных волн:

$$\Omega^1(\xi) = \sqrt{\frac{2(1 - \cos \xi)}{k_1(k_1 + k_2\tau_{21} + k_3\tau_{31}) + k_2\kappa_{12}^2(k_1\tau_{12} + k_2 + k_3\tau_{32}) + k_3\kappa_{13}^2(k_1\tau_{13} + k_2\tau_{23} + k_3)}}$$

Далее, для вычислений потребовались численные значения плотностей и скоростей звука сред структуры «кварц-вода-воздух».

Таблица 1. Скорость звука и плотность среды

Название среды	Скорость звука в среде, м/с	Плотность среды, г/см ³
1. Кварц	6000	2.6
2. Вода	1500	1.0
3. Воздух	330	1.2 · 10 ⁻³

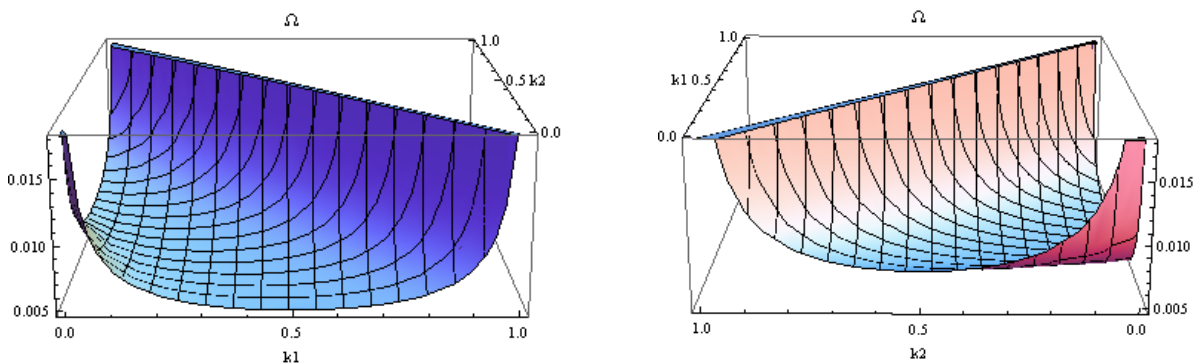


Рис. 5. Зависимость волноводной частоты ползущей моды от концентраций k_1 и k_2 с учетом заданного параметра $\xi = \pi$ и равенства $k_3 = 1 - k_1 - k_2$.

Так же можно более наглядно представить полученные результаты – рассмотреть ширину полос пропускания в разрезе, как функцию одной переменной.

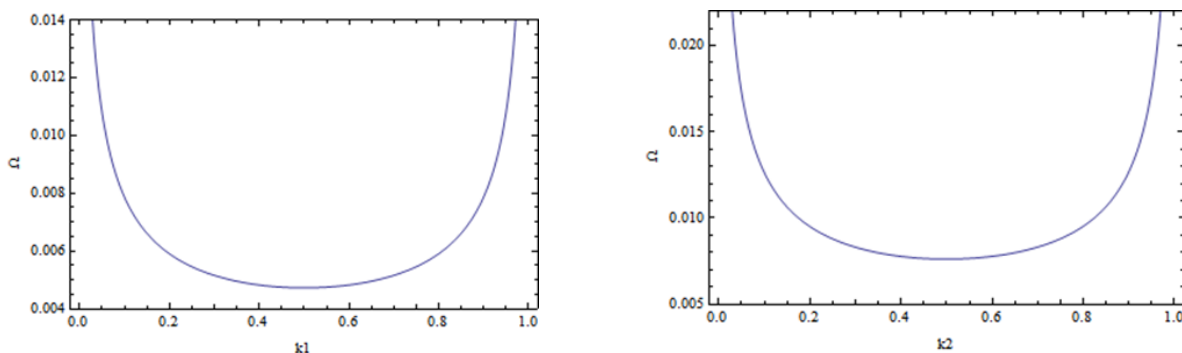


Рис. 6. Ширина полосы пропускания, «кварц-воздух» $k_2 = 0$ (слева), «вода-воздух» $k_1 = 0$ (справа).

Важно отметить, что волноводная частота ползущей моды, приближенно равная нулю ($\Omega \approx 0$), существенно зависит от линейных концентраций. На Рисунке 6 видно, что в обоих случаях существует локальный минимум в точках $k_1 = 0,5$ для

«кварц-воздух» и $k_2 = 0,5$ для «вода-воздух», при этом полоса пропускания ползущей моды расширяется к крайним точкам 0 и 1.

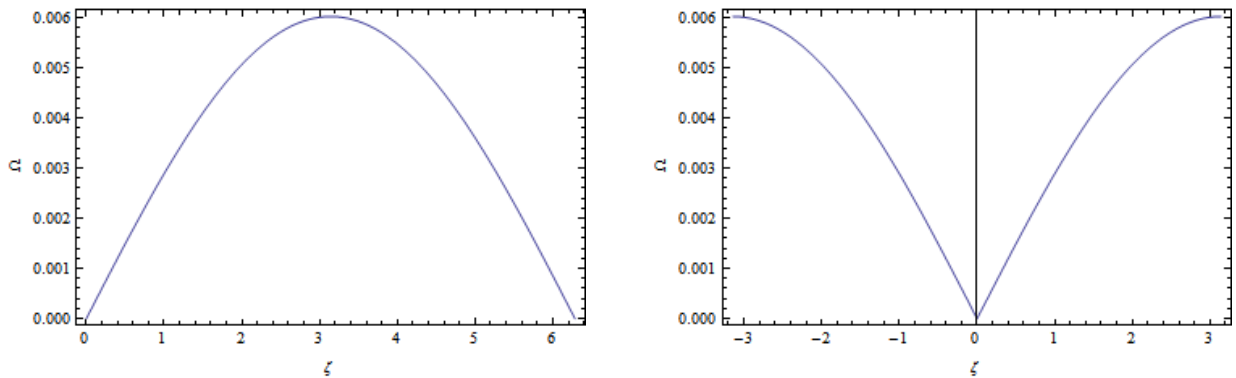


Рис. 7. Зависимость волноводной частоты для первой волноводной моды от волнового вектора ξ (слева) и то же самое в промежутке $-\pi < \xi < \pi$ (справа)

По характеру зависимости волноводной частоты от параметра сдвига фазы видно, что среда является сильно диспергирующей.

Заключение

На основании проведенного исследования можно выделить следующие ключевые выводы. В общем случае, было изучено распространение акустических волн в неоднородных одномерно-периодических структурах, и было выведено дисперсион-

ное соотношение для всех волноводных моделей.

Было получено явное выражение для низких волноводных частот в пределе длинных волн. Также были определены полосы пропускания и полосы запираения для выбранной цепочки неоднородностей, включая «кварц-вода-воздух».

Результаты данной работы имеют потенциал для применения в последующих исследованиях в области распространения волн в слоистых фоновых кристаллах.

Библиографический список

1. Сухинин С.В. Метод акустического зондирования неоднородной двухкомпонентной среды. – Новосибирск. Динамика сплошной среды, 2010. – Вып. 126.
2. Бриллюэн Л., Пароди М. Распространение волн в периодических структурах. – М.: Изд-во иностранной литературы, 1959.
3. Санчес Паленсия Э. Неоднородные среды и теория колебаний. – М.: Мир, 1984.
4. Сухинин, С.В. Распространение волн и резонансные явления в неоднородных средах / С.В. Сухинин // Прикладная механика и техническая физика. – 2001. – Т. 42, № 3(247). – С. 32-42. – EDN ONVVBT.
5. Deymier P.A. Acoustic metamaterials and phononic crystals. – New-York: Springer, 2013.
6. Sukhinin S.V. Wave propagation and resonance phenomena in inhomogeneous media // J. Appl. Mech. Tech. Phys. – 2001.
7. Sukhinin S.V., Kondratenko D.A. Wave propagation in strongly non homogeneous wave guide // Proc. Int. Conf. on MMET (Kharkov). – 1998. – P. 2-5.
8. Konstantinov A.P., Sukhinin S.V., Yurkovskiy V.S. Wave transmission and reflection at the boundary of phononic crystals // Journal of Physics: Conference Series. – 2017. – DOI:10.1088/1742-6596/894/1/012094.

WAVE PROPAGATION IN THREE-COMPONENT LAYERED PHONON CRYSTALS

D.A. Maglitsov, *Postgraduate Student*
Novosibirsk State University
(Russia, Novosibirsk)

***Abstract.** This research work focuses on mathematical modeling of wave propagation phenomena in inhomogeneous media. In the framework of the one-dimensional approximation, the characteristics of waveguides and resonances in inhomogeneous one-dimensional periodic structures consisting of three different components were studied. To describe the dynamics of acoustic waves in such structures, stationary equations of pressure fluctuations in the medium and corresponding boundary conditions were applied, which include continuity conditions for pressure and velocity.*

As a result of this study, an analytical solution for the fundamental cell was found. The passbands for various waveguide modes were also identified and a dispersion relation describing the nature of wave modes in structures of this type was obtained. In addition, the dependence of the waveguide frequency on the linear concentrations of materials in the fundamental cell was determined.

***Keywords:** acoustic waves in inhomogeneous media, bandwidths, phonon crystal, waveguide modes, dispersion ratio, vibration-isolating and sound-absorbing materials.*