# ОДНОРОДНОСТЬ МАГНИТНОГО ПОЛЯ СИСТЕМ ПРАВИЛЬНЫХ МНОГОУГОЛЬНИКОВ С ТОКОМ

**Л.А. Фишбейн,** *канд. физ.-мат. наук, доцент*
**Уральский государственный университет путей сообщений**
**(Россия, г. Екатеринбург)**

*DOI:10.24412/2500-1000-2023-9-1-294-298*

***Аннотация.*** *На основании закона Био-Савара-Лапласа получено выражение для магнитной индукции вдоль оси симметрии двух правильных эквивалентных осесимметричных произвольных многоугольников с током, а также условия обнуления второй производной в разложении в ряд Тейлора в центре системы. Показано, что такие системы обладают практически одинаковой однородностью магнитного поля.*

***Ключевые слова:*** *однородность магнитного поля, кольца Гельмгольца, круглые, треугольные и квадратные витки с током (кольца).*

Генерирование однородного магнитного поля является необходимым условием как для проведения многих физических и биологических экспериментов, так и для калибровки различных физических устройств. Наиболее часто для этих целей служат системы катушек с током, позволяющие достаточно легко поместить исследуемый объект в пространство с магнитным полем. В зависимости от назначения были разработаны различные конструкции систем катушек, отличающиеся друг от друга формой, количеством и пространственным расположением. Наиболее широко исследованы круглая и квадратная геометрия катушек в конфигурации Гельмгольца. В меньшей степени - треугольная и многоугольная геометрия.

В данной статье представлено сравнительное исследование однородности магнитного поля для круглых, квадратных, треугольных и шестиугольных катушек Гельмгольца вдоль оси симметрии.

**Магнитное поле системы двух правильных многоугольников с током**

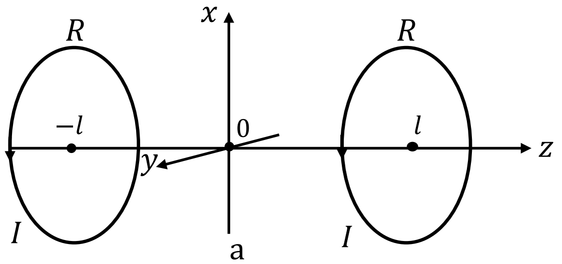
Используя закон Био-Савара-Лапласа, рассчитаем магнитное поле осесимметричной системы двух правильных $p$ – угольников (витков) со сторонами равными $b$, током $I$ и лежащих в плоскостях, перпендикулярных оси симметрии и находящихся на одинаковом расстоянии $l$ от центральной точки на оси $z = 0$. Ограничимся проекцией вектора магнитной индукции на ось $z$. В результате расчета получаем (рис. 1).

$$B_z(z) = p\frac{\mu_0}{2\pi}I\frac{b^2}{4}ctg\frac{\pi}{p}\Bigg[\frac{1}{\left((z+l)^2+\frac{b^2}{4}ctg^2\frac{\pi}{p}\right)\sqrt{(z+l)^2+\frac{b^2}{4}\left(1+ctg^2\frac{\pi}{p}\right)}}+$$
$$\frac{1}{\left((z-l)^2+\frac{b^2}{4}ctg^2\frac{\pi}{p}\right)\sqrt{(z-l)^2+\frac{b^2}{4}\left(1+ctg^2\frac{\pi}{p}\right)}}\Bigg]. \quad (1)$$

Отметим, что при $p \to \infty$ и $b \to 0$ $(pb \to 2\pi R)$ получается выражение для проекции магнитного поля двух круглых витков с током [1]

$$B_z(z) = \frac{\mu_0}{2}IR^2\left[\frac{1}{((z+l)^2+R^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{1}{((z-l)^2+R^2)^{\frac{3}{2}}}\right]. \quad (2)$$

Здесь $R -$ радиус витков (колец).



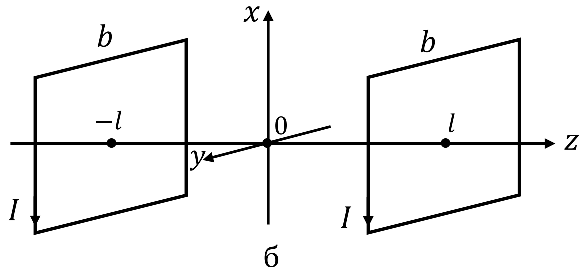




Рис. 1. Система двух соосных эквивалентных круглых (а) и квадратных (б) проводников с током

Введем безразмерные переменные и рассмотрим магнитное поле на оси в пространстве между двумя $p$ –угольниками с током

$$-1 \le \frac{z}{l} \le 1, d = \frac{b}{2l}, r = \frac{R}{l},$$

$$B_z(z) = p\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{l}d^2 ctg\frac{\pi}{p}\left[\frac{1}{\left((\frac{z}{l}+1)^2 + d^2 ctg^2\frac{\pi}{p}\right)\sqrt{(\frac{z}{l}+1)^2 + d^2\left(1+ctg^2\frac{\pi}{p}\right)}} + \frac{1}{\left((\frac{z}{l}-1)^2 + d^2 ctg^2\frac{\pi}{p}\right)\sqrt{(\frac{z}{l}-1)^2 + d^2\left(1+ctg^2\frac{\pi}{p}\right)}}\right], \quad (3)$$

$$B_z(0) = B_0 = p\frac{\mu_0}{\pi}\frac{I}{l}d^2 ctg\frac{\pi}{p}\frac{1}{\left(1 + d^2 ctg^2\frac{\pi}{p}\right)\sqrt{1 + d^2\left(1+ctg^2\frac{\pi}{p}\right)}}.$$

В указанной области разложим в в центре системы ($z = 0$) выражение для проекции магнитной индукции в ряд Тейлора по $z/l$ до четвертой степени. Очевидно, что нечетные степени в разложении зануляются, вследствие симметрии системы. Тогда имеем

$$B_z(z) = B_z(0) + \frac{1}{2!}\frac{d^2B_z(0)}{dz^2}z^2 + \frac{1}{4!}\frac{d^4B_z(0)}{dz^4}z^4 + \cdots \quad (4)$$

Чем больше младших производных в разложении можно занулить, тем однороднее магнитное поле в центре системы. Пусть вторая производная от проекции вектора магнитной индукции (3) по $z$ равна нулю. Получаем кубическое уравнение вида

$$d^6\left(3ctg^6\frac{\pi}{p} + 5ctg^4\frac{\pi}{p} + 2ctg^2\frac{\pi}{p}\right) - d^4\left(6ctg^4\frac{\pi}{p} + 10ctg^2\frac{\pi}{p} + 6\right) - d^2\left(21ctg^2\frac{\pi}{p} + 15\right) - 12 = 0 \quad (5)$$

Данное уравнение имеет аналитическое решение для произвольного $p$. В таблице 1 приведены численные значения $d(p)$ для первых десяти правильных многоугольников (и окружности) и приведенный радиус описанной окружности $r(p)$ для сравнения размеров этих многоугольников в поперечном направлении. Выражения (1,2) и значения таблицы 1 совпадают с аналитическими результатами работ [2, 3], где были рассмотрены круглые ($p = \infty$) , треугольные ($p = 3$) и квадратных ($p = 4$) многоугольники с током с учетом замены $l = h/2, b = 2a,\ N = 1$ где $h -$ расстояние между многоугольниками, $2a$ —длина стороны многоугольников или диаметр окружности, $N$ —число витков с током в каждом многоугольнике.

При занулении второй производной разложение магнитной индукции в ряд Тейлора начинается с четвертой степени (не считая нулевой). Такие системы называются системами (кольцами) Гельмгольца [4].

Таблица 1.

| $\boldsymbol{p}$ | $\boldsymbol{d = b/2l}$ | $\boldsymbol{r = R/l}$ |
|---|---|---|
| 3 | 3.060 | 3.534 |
| 4 | 1.837 | 2.597 |
| 5 | 1.370 | 2.331 |
| 6 | 1.107 | 2.213 |
| 7 | 0.924 | 2.150 |
| 8 | 0.808 | 2.112 |
| 9 | 0.714 | 2.087 |
| 10 | 0.639 | 2.069 |
| ∞ | 0 | 2 |

Отметим, что в работе [3] для сравнения однородности магнитного поля систем круглых, треугольных и квадратных витков рассматриваются системы с одинаковыми сторонами $2a$, которые имеют приблизительно одинаковые поперечные, но разные продольные размеры, т.е. находятся на разном расстоянии $h(a)$ друг от друга. Магнитное поле изучается на одном и том же отрезке вдоль оси $z$ вокруг центральной точки $z = 0$. В результате имеем [3]:

для круглых витков

$$B_z(z) = \frac{32\pi B_{z0}}{5\sqrt{5}a}\left[1 - 1{,}152\left(\frac{z}{a}\right)^4\right], h = a, \qquad B_{z0} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}N,$$

для треугольных витков

$$B_z(z) = \frac{36B_{z0}}{1.3204\sqrt{4.3204}a}\left[1 - 6{,}0254\left(\frac{z}{a}\right)^4\right], h = 0{,}6536a,$$

для квадратных витков

$$B_z(z) = \frac{16B_{z0}}{1.2965\sqrt{2.2965}a}\left[1 - 0{,}8068\left(\frac{z}{a}\right)^4\right], h = 1{,}0890a.$$

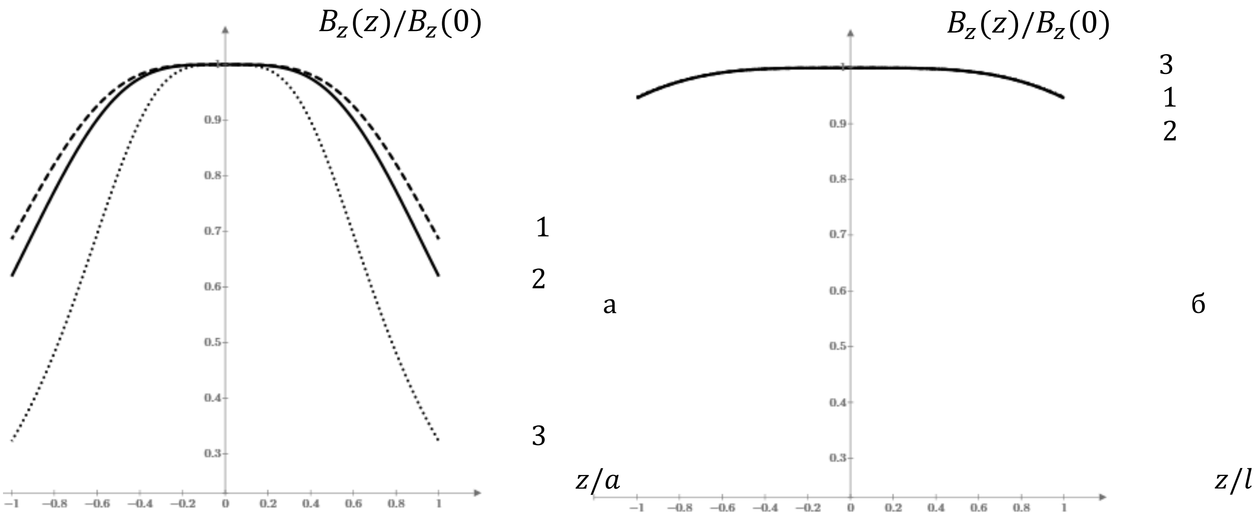



Рис. 2. Распределение магнитного поля система двух соосных: а) квадратных (1), круглых (2) и треугольных (3) проводников с током имеющих одинаковые $a$ длины сторон; б) квадратных (1), круглых (2) и треугольных (3) проводников с током находящихся на одинаковом расстоянии $l$ друг от друга.

На основании приведенных выше выражений и расчета, приведенного на рисунке 2а в работах делается вывод, что магнитное поле системы треугольников с током гораздо менее однородно, чем поле системы квадратов и круглых витков с током.

Нам представляется более правильным другой подход. Сравним магнитные поля систем, имеющих одинаковые продольные размеры, т.е. находящихся на одинаковом расстоянии $l$ друг от друга, но разные поперечные. В результате имеем:

для круглых витков

$$B_z(z) = \frac{\mu_0 I}{l}\frac{4}{5^{\frac{3}{2}}}\left[1 - \frac{9}{125}\left(\frac{z}{l}\right)^4\right] = \frac{\mu_0 I}{l}0.3578\left[1 - 0{,}0720\left(\frac{z}{l}\right)^4\right],$$

для треугольных витков

$$B_z(z) = \frac{\mu_0 I}{l}0.3411\left[1 - 0{,}0687\left(\frac{z}{l}\right)^4\right],$$

для квадратных витков

$$B_z(z) = \frac{\mu_0 I}{l}0.3528\left[1 - 0{,}0709\left(\frac{z}{l}\right)^4\right],$$

для шестиугольных витков

$$B_z(z) = \frac{\mu_0 I}{l}0.3567\left[1 - 0{,}0662\left(\frac{z}{l}\right)^4\right],$$

и т.д. Если на рис.2а для каждой из кривых ограничится интервалом по оси абсцисс

$$-\frac{h(a)}{a} \leq \frac{z}{a} \leq \frac{h(a)}{a},$$

то мы получим по оси ординат значения аналогичные значениям, приведенным на рисунке 2б.

**Заключение**

На основании закона Био-Савара-Лапласа получено выражение, позволяющее рассчитать магнитное поле вдоль оси симметрии систем Получено выражение, позволяющее. Таким образом, на основании полученных выше уравнений и расчетов, приведенных на рисунке 2б, можно сделать вывод о, практически, одинаковой однородности магнитных полей систем правильных $p$ – угольников (и колец) с током, имеющих одинаковые продольные размеры.

**Библиографический список**

1. Fishbein L. On the possibility of creating a magnetic field with a given degree of spatial inhomogeneity // Rev. Sci. Instrum. 92, 064705 (2021). doi: 10.1063/5.0040871.
2. D.M. Petkovic and M.D. Radi´c. Generalization of helmholtz coil ´problem // Serbian Journal of Electrical Engineering. – 2015. – Vol. 12, №3. – Pp. 375-384.
3. Restrepo, A. F., Franco, E., Cadavid, H., & Pinedo, C. R. (2017). A comparative study of the magnetic field homogeneity for circular, square and equilateral triangular helmholtz coils // International Conference on Electrical, Electronics, Communication, Computer, and Optimization Techniques (ICEECCOT). doi:10.1109/iceeccot.2017.8284514.
4. Caprari R.S. Optimal current loop systems for producing uniform magnetic fields // Meas. Sci. Technol. – 1995. – №6. – P. 593.

## UNIFORMITY OF THE MAGNETIC FIELD OF SYSTEMS OF REGULAR POLYGONS WITH CURRENT

**L.A. Fishbein,** *Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor*
**Ural State University of Railway Communications**
**(Russia, Yekaterinburg)**

***Abstract.*** *Based on the Biot-Savard-Laplace law, an expression is obtained for magnetic induction along the axis of symmetry of two regular equivalent axisymmetric arbitrary polygons with current, as well as the conditions for zeroing the second derivative in the Taylor series expansion at the center of the system. It is shown that such systems have almost the same uniformity of the magnetic field.*

***Keywords:*** *magnetic field uniformity, Helmholtz rings, round, triangular and square coils with current (rings).*