О МАГНИТНОМ ПОЛЕ СИСТЕМЫ КОЛЕЦ ГЕЛЬМГОЛЬЦА

Л.А. Фишбейн, *канд. физ.-мат. наук, доцент*
Уральский государственный университет путей сообщений
(Россия, г. Екатеринбург)

DOI:10.24412/2500-1000-2023-9-1-289-293

Аннотация. *Показано, что производные одинакового порядка по всем пространственным переменным вектора магнитной индукции в центральной точке системы колец Гельмгольца пропорциональны друг другу, т.е. однородность магнитного поля системы одинакова по всем направлениям. Получено разложение проекций вектора магнитной индукции в этой точке до 8 порядка в ряд Тейлора по всем пространственным переменным.*

Ключевые слова: *однородность магнитного поля, кольца Гельмгольца.*

В работах [1, 2] было высказано предположение, что при рассмотрении систем соосных идентичных проводников с током (колец) обнуление производных одного порядка в центральной точке систем при разложении магнитной индукции в ряд Тейлора происходит по всем направлениям одновременно. В данной работе мы приводим доказательство этого утверждения для производных до восьмой степени включительно.

Магнитное поле системы колец Гельмгольца

Рассмотрим [2, 3] два соосных симметричных витка (кольца) Гельмгольца с осью симметрии, совпадающей с z, радиусами R, токами $I > 0$, находящимися на расстоянии l от центральной точки $z = 0$. В цилиндрической системе координат проекции вектора магнитной индукции $\boldsymbol{B}$ имеют вид

$$\boldsymbol{B} = B_z\boldsymbol{e}_z + B_\rho\boldsymbol{e}_\rho + B_\varphi\boldsymbol{e}_\varphi, B = \sqrt{B_z^2 + B_\rho^2 + B_\varphi^2},$$

$$\begin{cases} B_z(x,y) = \dfrac{\mu I}{2\pi l}F(x,y) = \dfrac{\mu I}{2\pi l}(F_{m_1}(x,y) + F_{m_2}(x,y)), \\ B_\rho(x,y) = \dfrac{\mu I}{2\pi l}T(x,y) = \dfrac{\mu I}{2\pi l}(T_{m_1}(x,y) + T_{m_2}(x,y)), \\ B_\varphi\,(x,y) = 0, B_0 = B(0,0) = \dfrac{\mu I}{l}\dfrac{r^2}{(r^2+1)^{\frac{3}{2}}}, I > 0, \\ B(x,0) = B_z(x,0) = \dfrac{2\mu I}{l}v(x), \\ v(x) = \dfrac{r^2}{4}\left[\dfrac{1}{(r^2+(x+1)^2)^{\frac{3}{2}}} + \dfrac{1}{(r^2-(x-1)^2)^{\frac{3}{2}}}\right]. \end{cases} \tag{1}$$

где φ, ρ, и z – цилиндрические координаты,

$$x = \frac{z}{l}, y = \frac{\rho}{l}, r = \frac{R}{l},$$

$$\begin{cases} F_{m_1}(x,y) = \dfrac{K(m_1) + \dfrac{r^2 - y^2 - (x+1)^2}{(r-y)^2 + (x+1)^2} E(m_1)}{\sqrt{(r+y)^2 + (x+1)^2}}, \\ F_{m_2}(x,y) = \dfrac{K(m_2) + \dfrac{r^2 - y^2 - (x-1)^2}{(r-y)^2 + (x-1)^2} E(m_2)}{\sqrt{(r+y)^2 + (x-1)^2}}, \\ T_{m_1}(x,y) = \dfrac{x+1}{y} \dfrac{-K(m_1) + \dfrac{r^2 + y^2 + (x+1)^2}{(r-y)^2 + (x+1)^2} E(m_1)}{\sqrt{(r+y)^2 + (x+1)^2}}, \\ T_{m_2}(x,y) = \dfrac{x-1}{y} \dfrac{-K(m_2) + \dfrac{r^2 + y^2 + (x-1)^2}{(r-y)^2 + (x-1)^2} E(m_2)}{\sqrt{(r+y)^2 + (x-1)^2}}, \end{cases} \quad (2)$$

$$K(m) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\beta}{\sqrt{1 - m^2 sin^2\beta}}, \; E(m) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - m^2 sin^2\beta}\; d\beta,$$

$$0 \le m_1^2 = \frac{4ry}{(r+y)^2 + (x+1)^2} \le 1, \qquad 0 \le m_2^2 = \frac{4ry}{(r+y)^2 + (x-1)^2} \le 1.$$

Предположим, что $B_z(x,y)$ и $B_\rho(x,y)$ являются достаточно хорошими функциями и могут быть разложены в ряд Тейлора по переменным x и y [4].

$$B_q(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{\partial^n B_q(x,y)}{\partial x^{n-k} \partial y^k}\bigg|_{x=0,y=0} x^{n-k} y^k, C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}, q = z, \rho.$$

Для систем витков (колец) с током имеет место пространственная симметрия [2].

$$\begin{cases} B_\rho(x,y) = -B_\rho(-x,y), B_z(x,y) = B_z(-x,y), \\ B_\rho(x,y) = -B_\rho(x,-y), B_z(x,y) = B_z(x,-y). \end{cases}$$

Из указанных выше уравнений следует, что

$$B_z(x,y) = B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \sum_{k=0}^{n} \frac{C_{2n}^{2k} \partial^{2n} B_z(x,y)}{\partial x^{2(n-k)} \partial y^{2k}}\bigg|_{\substack{x=0,\\ y=0}} x^{2(n-k)} y^{2k}], \quad (3)$$

$$B_\rho(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{C_{2n}^{2k+1} \partial^{2n} B_\rho(x,y)}{\partial x^{2n-(2k+1)} \partial y^{2k+1}}\bigg|_{\substack{x=0,\\ y=0}} x^{2n-(2k+1)} y^{2k+1}, B_\rho\,(x,0) \;=\; B_\rho\,(0,y) \;=\; 0. (4)$$

Запишем уравнения Максвелла для стационарного магнитного поля в отсутствии токов [5]

$$div\vec{B} = 0, rot\vec{B} = 0.$$

В цилиндрической системе координат они имеют вид

$$\frac{\partial B_\rho}{\partial x} - \frac{\partial B_z}{\partial y} = 0, \frac{1}{y}\frac{\partial (yB_\rho)}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial x} = 0.$$

Дифференцируя эти уравнения по соответствующим координатам с учетом выражений (3) и (4) получаем связь между производными одной и той же степени в центральной точке

$$\begin{cases}
\left.\frac{\partial^2 B_\rho}{\partial x \partial y}\right|_{\substack{x=0,\\ y=0}} = \left.\frac{\partial^2 B_z}{\partial y^2}\right|_{\substack{x=0,\\ y=0}} = -\frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2}\right|_{\substack{x=0,\\ y=0}}, \\
\left.\frac{\partial^4 B_\rho}{\partial x^3 \partial y}\right|_{\substack{x=0,\\ y=0}} = \left.\frac{\partial^4 B_z}{\partial x^2 \partial y^2}\right|_{\substack{x=0,\\ y=0}} = -\frac{1}{2}\left.\frac{\partial^4 B_z}{\partial x^4}\right|_{\substack{x=0,\\ y=0}}, \left.\frac{\partial^4 B_\rho}{\partial y^3 \partial x}\right|_{\substack{x=0,\\ y=0}} = \left.\frac{\partial^4 B_z}{\partial y^4}\right|_{\substack{x=0,\\ y=0}} = \frac{3}{8}\left.\frac{\partial^4 B_z}{\partial x^4}\right|_{\substack{x=0,\\ y=0}}, \\
\left.\frac{\partial^6 B_\rho}{\partial x^5 \partial y}\right|_{\substack{x=0,\\ y=0}} = \left.\frac{\partial^6 B_z}{\partial x^4 \partial y^2}\right|_{\substack{x=0,\\ y=0}} = -\frac{1}{2}\left.\frac{\partial^6 B_z}{\partial x^6}\right|_{\substack{x=0,\\ y=0}}, \left.\frac{\partial^6 B_\rho}{\partial y^3 \partial x^3}\right|_{\substack{x=0,\\ y=0}} = \left.\frac{\partial^6 B_z}{\partial x^2 \partial y^4}\right|_{\substack{x=0,\\ y=0}} = \frac{3}{8}\left.\frac{\partial^6 B_z}{\partial x^6}\right|_{\substack{x=0,\\ y=0}}, \\
\left.\frac{\partial^6 B_\rho}{\partial y^5 \partial x}\right|_{\substack{x=0,\\ y=0}} = \left.\frac{\partial^6 B_z}{\partial y^6}\right|_{\substack{x=0,\\ y=0}} = -\frac{5}{16}\left.\frac{\partial^6 B_z}{\partial x^6}\right|_{\substack{x=0,\\ y=0}}, \left.\frac{\partial^6 B_\rho}{\partial y^5 \partial x}\right|_{\substack{x=0,\\ y=0}} = \left.\frac{\partial^6 B_z}{\partial y^6}\right|_{\substack{x=0,\\ y=0}} = -\frac{5}{16}\left.\frac{\partial^6 B_z}{\partial x^6}\right|_{\substack{x=0,\\ y=0}}, \\
\left.\frac{\partial^8 B_\rho}{\partial y^5 \partial x^3}\right|_{\substack{x=0,\\ y=0}} = \left.\frac{\partial^8 B_z}{\partial x^6 \partial y^2}\right|_{\substack{x=0,\\ y=0}} = -\frac{1}{2}\left.\frac{\partial^8 B_z}{\partial x^8}\right|_{\substack{x=0,\\ y=0}}, \left.\frac{\partial^8 B_\rho}{\partial y^3 \partial x^5}\right|_{\substack{x=0,\\ y=0}} = \left.\frac{\partial^8 B_z}{\partial x^4 \partial y^4}\right|_{\substack{x=0,\\ y=0}} = \frac{3}{8}\left.\frac{\partial^8 B_z}{\partial x^8}\right|_{\substack{x=0,\\ y=0}}, \\
\left.\frac{\partial^8 B_\rho}{\partial y^5 \partial x^3}\right|_{\substack{x=0,\\ y=0}} = \left.\frac{\partial^8 B_z}{\partial x^2 \partial y^6}\right|_{\substack{x=0,\\ y=0}} = -\frac{5}{16}\left.\frac{\partial^8 B_z}{\partial x^8}\right|_{\substack{x=0,\\ y=0}}, \left.\frac{\partial^8 B_\rho}{\partial y^7 \partial x}\right|_{\substack{x=0,\\ y=0}} = \left.\frac{\partial^8 B_z}{\partial y^8}\right|_{\substack{x=0,\\ y=0}} = \frac{35}{128}\left.\frac{\partial^8 B_z}{\partial x^8}\right|_{\substack{x=0,\\ y=0}}.
\end{cases} \quad (5)$$

и т.д. Из данной системы уравнений следует, что все производные одной и той же степени в нуле пропорциональны друг другу. Последнее означает, что они обнуляются одновременно. Отметим, что из (3) следует, что

$$\left.\frac{\partial^p B_z(x,y)}{\partial x^p}\right|_{\substack{x=0,\\ y=0}} = \left.\frac{d^p B_z(x,0)}{dx^p}\right|_{x=0}.$$

Тогда, по крайней мере, для $g = z, \rho$ и $p = 4,6,8$ $(0 \le k \le p)$ мы имеем

$$\left.\frac{\partial^p B_g(x,y)}{\partial x^k \partial y^{p-k}}\right|_{\substack{x=0,\\ y=0}} = const \left.\frac{\partial^p B_z(x,y)}{\partial x^p}\right|_{\substack{x=0,\\ y=0}} = const \left.\frac{d^p B_z(x,0)}{dx^p}\right|_{x=0}.$$

Для системы двух колец (1)

$$\left.\frac{d^n B_z(x,0)}{dx^n}\right|_{x=0} = \frac{2\mu I}{l} v^{(n)}, v^{(n)} = \left.\frac{d^n v(x)}{dx^n}\right|_{x=0},$$

$$v^{(2)} = -\frac{3}{4} r^2 \frac{r^2-4}{(r^2+1)^{\frac{7}{2}}}, v^{(4)} = \frac{45}{4} r^2 \frac{r^4 - 12r^2 + 8}{(r^2+1)^{\frac{11}{2}}}, v^{(6)} = -\frac{315}{4} r^2 \frac{5r^6 - 120r^4 + 240r^2 - 64}{(r^2+1)^{\frac{15}{2}}},$$

$$v^{(8)} = \frac{14175}{2} r^2 \frac{7r^8 - 280r^6 + 1120r^4 - 896r^2 + 128}{(r^2+1)^{\frac{19}{2}}}, \text{и т. д.}$$

Чем с более высокой степени начинаются ненулевые производные в разложении в ряд Тейлора для магнитной индукции, тем более однородным является магнитное поле в центральной области. Для системы из двух колец занулить можно только вторую производную. Пусть втораяпервая ненулевая производная будет четвертая. Потребуем, чтобы вторая производная

$$\left.\frac{\partial^2 B_z(x,y)}{\partial x^2}\right|_{\substack{x=0,\\ y=0}} = \left.\frac{d^2 B_z(x,0)}{dx^2}\right|_{x=0,} = 0.$$

Тогда

$$r = 2.$$

Так как первая ненулевая производная в разложении является производной четверной степени, то такие системы называют системами 4 степени [1].

В этом случае мы можем представить разложение $B_z(x,y)$ и $B_\rho(x,y)$ в области пространства между витками (кольцами) $-1 \le x \le 1, 0 \le y \le 1$ в следующем виде:

$$\begin{aligned} B_z(x,y) = B_0[1 &+ \alpha(8x^4 - 24x^2y^2 + 3y^4) + \beta(16x^6 - 120x^4y^2 + 90x^2y^4 - 5y^6) \\ &+ \gamma(128x^8 - 1792x^6y^2 + 3360x^4y^4 - 1120x^2y^6 + 35y^8) \ldots], \\ B_\rho(x,y) = B_0[&4\alpha(-4x^3y + 3xy^3) \\ &+ 6\beta(-8x^5y + 20x^3y^3 - 5xy^5) \qquad (6) \\ &+ 8\gamma(-64x^7y + 336x^5y^3 - 280x^3y^5 + 35xy^7) \ldots], \end{aligned}$$

где

$$B_0|_{r=2} = \frac{\mu I}{l}\frac{4}{5^{\frac{3}{2}}}, \alpha = \frac{\left.\frac{d^4 B_z(x,0)}{dx^4}\right|_{\substack{r=2\\ x=0}}}{8\cdot 4!\, B_0} = -9\cdot 10^{-3}, \beta = \frac{\left.\frac{d^6 B_z(x,0)}{dx^6}\right|_{\substack{r=2\\ x=0}}}{16\cdot 6!\, B_0} = 1232\cdot 10^{-6},$$

$$\gamma = \frac{\left.\frac{\partial^8 B_z(x,y)}{\partial x^8}\right|_{\substack{x=0,\\ y=0}}}{128\cdot 8!\, B_0} = 117\cdot 10^{-7}.$$

Библиографический список

1. Caprari R.S. Optimal current loop systems for producing uniform magnetic fields // Meas. Sci. Technol. – 1995. – №6. – P. 593.

2. Fishbein L. On the possibility of creating a magnetic field with a given degree of spatial inhomogeneity // Rev. Sci. Instrum. 92, 064705 (2021). DOI: 10.1063/5.0040871.

3. Смайт В. Электростатика и электродинамика. – М.: Иностранная литература, 1954. – 604 с.

4. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. – М.: Наука, 1973. – 832 с.

5. Савельев И.В. Курс общей физики: Учебное пособие. В 3-х тт. Т. 2. Электричество и магнетизм. Волны. Оптика. – СПб.: Лань, 2006. – 496 с.

ABOUT THE MAGNETIC FIELD OF THE HELMHOLTZ RING SYSTEM

L.A. Fishbein, *Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor*
Ural State University of Railway Communications
(Russia, Yekaterinburg)

Abstract. *It is shown that derivatives of the same order with respect to all spatial variables of the magnetic induction vector at the central point of the system of Helmholtz rings are proportional to each other, i.e. the uniformity of the magnetic field of the system is the same in all directions. An expansion of the projections of the magnetic induction vector at this point up to the 8th order into a Taylor series in all spatial variables has been obtained.*
Keywords: *uniformity of magnetic field, Helmholtz rings.*