РЕШЕНИЕ ОЛИМПИАДНЫХ ЗАДАЧ МЕТОДАМИ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ

М.И. Мухаметова, *студент*
Г.Х. Воистинова, *канд. пед. наук, доцент*
Стерлитамакский филиал Уфимского университета науки и технологий (Россия, г. Стерлитамак)

DOI:10.24412/2500-1000-2023-6-2-163-168

Аннотация. *В статье раскрыты некоторые приемы решения олимпиадных задач средствами дискретной математики. Подчеркивается преимущество владения разными методами и способами решения таких задач и определение оптимального из них. Олимпиадные задачи требуют нестандартного подхода. Успешно участвовать в олимпиаде по математике может учащийся, знакомый не только со стандартными способами решения задач, но и приемами, выходящими за рамки школьного курса.*

Ключевые слова: *олимпиадные задачи, методы решения, графы, комбинаторика.*

Олимпиадные задачи по математике – термин для обозначения круга задач, для решения которых обязательно требуется неожиданный и оригинальный подход.

Решение олимпиадных задач принципиально отличается от решения школьных, даже очень сложных, задач. Это обусловлено, прежде всего, выбором разделов, традиционно рассматриваемых на олимпиадах. Теория игр, графы, уравнения в целых числах и т.д. не рассматриваются в школьном курсе математики, не говоря о принципе Дирихле, элементах теории чисел и комбинаторики, логических задачах. И чем больше методов, способов и приемов решения олимпиадных задач ученик знает, тем больше его шансы успешно выступить на олимпиаде.

Какая же задача называется нестандартной? Л.М. Фридман дал следующее определение: «нестандартные задачи – это такие задачи, для которых в курсе математики не имеется общих правил и положений, определяющих точную программу их решения» [7]. Однако следует заметить, что понятие «нестандартная задача» является относительным. Одна и та же задача может быть стандартной или нестандартной, в зависимости от того, знаком ли школьник со способами решения задач такого типа. Таким образом, нестандартная задача – это задача, алгоритм которой неизвестен, т.е. неизвестен ни способ её решения, ни то, на какой учебный материал опирается решение. А некоторые задачи требуют еще и специальных знаний, подготовки. К таким задачам относятся задачи на смекалку, на логику, применения инвариантов, задачи на раскраски, на чет и нечет и т.д. Конечно, для успешного решения любой задачи нужно уметь думать, догадываться, но этого мало. Нужны знания и опыт в решении задач. Полезно владеть и определенными общими подходами к решению таких задач. Поэтому мы решили разобраться в решении этих задач, попробовать их исследовать, найти общие подходы. Любая задача должна чему-нибудь научить. Решение каждой задачи должно быть шагом вперед в развитии математических знаний, умений и навыков, должно обогащать знания и опыт, учить ориентироваться в различных ситуациях.

При подготовке к математической олимпиаде, часто учащиеся сталкиваются с проблемой, каким методом решать задачу. Хотелось бы найти метод, который был бы интересен, с помощью которого можно было бы решить широкий круг задач.

Метод графов

Графический способ содержит в себе метод, основанный на теории графов. Этот метод показался интересным и увлекательным. Однако теория графов не рассматривается в школьном курсе математики, но широко используется в решении олимпиадных задач. Давайте рассмотрим этот метод подробнее.

Граф – это геометрическая фигура, состоящая из точек (вершины графа) и линий, их соединяющих (рёбра графа). Вершины, из которых выходит нечетное число ребер, называют нечетными вершинами, а вершины, из которых выходит четное количество ребер – четными.

Решая задачу про кенигсбергские мосты, Эйлер установил свойства графа:

1. Если все вершины графа четные, то можно одним росчерком (т.е. не отрывая карандаша от бумаги и не проводя дважды по одной и той же линии) начертить граф. При этом движение можно начать с любой вершины и окончить в той же вершине.

2. Граф с двумя нечетными вершинами тоже можно начертить одним росчерком. Движение нужно начинать от любой нечетной вершины, а заканчивать на другой нечетной вершине.

3. Граф с более чем двумя нечетными вершинами невозможно начертить одним росчерком.

4. Число нечетных вершин графа всегда четное.

5. Если в графе имеются нечетные вершины, то наименьшее число росчерков, которыми можно нарисовать граф будет равно половине числа нечетных вершин этого графа.

Выделяют несколько типов задач, решаемых методом графов:

1. Задачи на вычерчивание фигур одним росчерком.

2. Логические задачи.

3. Задачи о мостах.

4. Задачи о «правильном» раскрашивании карт.

5. Задачи о колодцах.

6. Задачи на построение уникурсальных графов.

7. Задачи комбинаторного характера.

Рассмотрим задачи, которые можно решить методом графов.

Задачи на вычерчивание фигур одним росчерком

Фигуры, которые можно будет вычертить одним росчерком, в математической и методической литературе называют Эйлеровыми графами [7]. Чтобы решить задачи данного типа следует знать свойства графа, рассмотренные выше.

Например, у фигур 1 и 5 (рис. 1) все вершины четные, поэтому данную фигуру можно начертить одним росчерком (свойство 1), у фигур 2, 3, 6 имеется две нечетных вершины, но (по свойству 2) и их можно начертить, если начать с одной из нечетных вершин. А вот фигуры 4 и 7 нельзя начертить одним росчерком, так как у них более двух нечетных вершин [5].

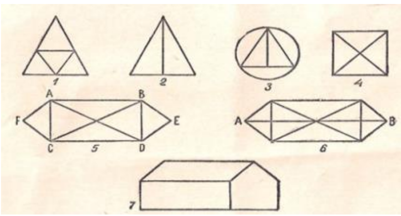

Рис. 1. Эйлеровы графы

Задача 1. Начертить одним росчерком следующие фигуры (рис. 2).

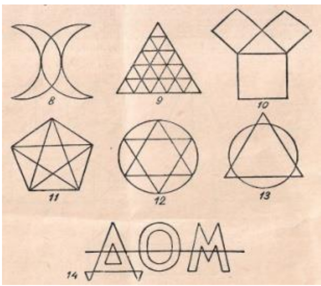

Рис. 2. Эйлеровы графы

Логические задачи

При решении логических задач следует выделить группы объектов и элементы к ним относящиеся – вершины графа, далее из условия задачи устанавливаем между ними отношения – ребра графа. Если отношения неконкретные, то ребра рисуем пунктирной линией, если конкретные, то сплошной линией.

Задача 2. В первенстве класса по настольному теннису 6 участников: Андрей, Борис, Виктор, Галина, Дмитрий и Елена. Первенство проводят по круговой системе – каждый из участников играет с каждым из остальных один раз. К настоящему моменту некоторые игры уже проведены: Андрей сыграл с Борисом, Галиной, Еленой; Борис – с Андреем, Галиной; Виктор – с Галиной, Дмитрием, Еленой; Галина – с Андреем, Виктором и Борисом. Сколько игр проведено к настоящему моменту и сколько ещё осталось [4]?

Решение: В данной задаче одна группа – игроки. Поэтому устанавливаем отношения между игроками (рис. 3).

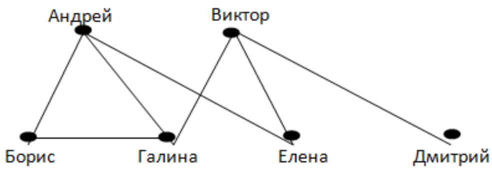

Рис.3. Граф проведенных игр

Посчитав количество ребер, ответим на вопрос, сколько игр сыгранно к настоящему моменту.

Ответ: 7 игр.

Построим граф для непроведенных игр (рис. 4), на этом рисунке граф имеет 8 ребер, следовательно, осталось провести 8 игр.

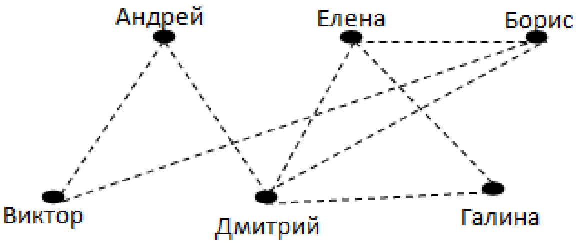

Рис. 4. Граф непроведенных игр

Задача 3. Купленные в подарок игрушки (пистолет, сумочку, куклу и машину) уложили в четыре коробки, по одной игрушке в каждую. Требуется узнать, что положено в каждую коробку, если известно следующее: машинка и пистолет не в красной коробке; коробка с сумочкой находится между синей коробкой и коробкой с куклой; в зеленой коробке не сумочка и не машинка; желтая и зеленая коробки находятся около коробки с пистолетом [5].

Решение: Построим граф, рассуждая следующим образом. По условию машина и пистолет не в красной коробке – соединим эти вершины штриховыми линиями. Известно, что коробка с сумочкой не синяя, соединим эти вершины штриховой линией. Сумочка и машинка не в зеленой коробке, тоже соединяем соответствующие вершины штриховыми линиями. Пистолет не в желтой и не в зеленой коробках, соединяем также эти вершины штриховыми линиями.

Становится очевидным, что пистолет лежит в синей коробке, соединяем соответствующие вершины стрелкой. Теперь становится очевидным то, что машина находится в желтой коробке. Сумочка лежит в красной коробке, а кукла в зеленой (рис. 5).

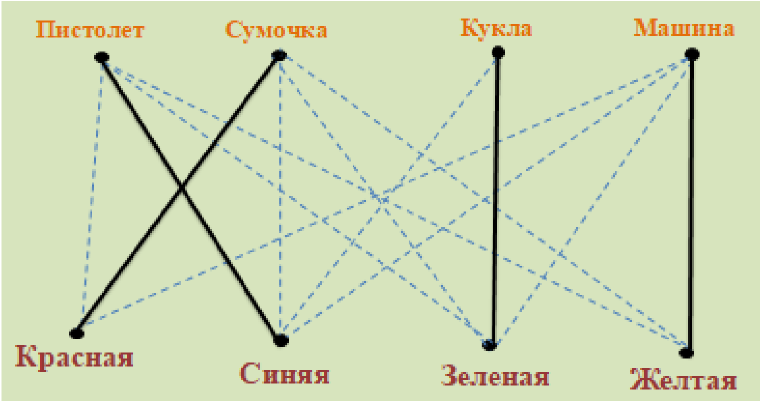

Рис. 5. Граф решения

Ответ: Пистолет – в синей, сумочка – в красной, кукла – в зеленой, машинка – в желтой коробках.

Методы комбинаторики

Основной вопрос комбинаторики – «сколько?», основная задача – подсчёт числа элементов конечного множества.

В комбинаторных задачах нас обычно интересует, сколько комбинаций, удовлетворяющих тем или иным условиям, можно составить из заданного конечного набора объектов. Как отмечают методисты [1, 2], в простейших случаях мы можем выписать все нужные нам комбинации и непосредственно подсчитать их. Однако при бессистемном выписывании легко упустить какую-то комбинацию или, наоборот, посчитать некоторую комбинацию дважды. Поэтому при переборе вариантов желательно придерживаться двух правил.

1. Обозначаем наши комбинации буквами или цифрами так, что каждая комбинация будет обозначена своей уникальной последовательностью букв или цифр.

2. Выписываем комбинации в алфавитном порядке (при обозначении буквами) или по возрастанию чисел (при обозначении цифрами). При таком переборе ни один вариант не ускользнёт от нас и, с другой стороны, будет исключена возможность повторения вариантов.

Задача 4. Маша собирается съесть яблоко, сливу и мандарин, но пока не решила, в какой последовательности. Сколькими способами Маша может выбрать эту последовательность?

Решение: Обозначаем буквами: Я – яблоко, С – слива, М – мандарин. Тогда, например, СМЯ – это вариант, когда Маша сначала съест сливу, потом – мандарин, потом – яблоко. Выпишем варианты в алфавитном порядке:

МСЯ, МЯС, СМЯ, СЯМ, ЯМС, ЯСМ.

Получилось 6 вариантов.

Задача 5 (Задача Леонарда Эйлера). Четыре гостя при входе в ресторан отдали швейцару свои шляпы, а при выходе получили их обратно. Невнимательный швейцар раздал шляпы случайным образом. Сколько существует вариантов, при которых каждый гость получил чужую шляпу [8]?

Решение: Пронумеруем гостей цифрами 1, 2, 3, 4 и так же пронумеруем их шляпы. Считаем, что шляпа с данным номером принадлежит гостю с этим же номером (то есть, например, шляпа 2 принадлежит гостю 2). Тогда каждый вариант получения шляп обозначается четырёхзначным числом, составленным из цифр 1, 2, 3 и 4, в котором номер позиции цифры есть номер гостя, а сама цифра есть номер полученной им шляпы (номера позиций будем считать слева направо).

Например, комбинация 4132 означает, что первый гость получил четвёртую шляпу, второй – первую, третий – третью, а четвёртый – вторую. Такой вариант не годится по условию, поскольку третий получил свою шляпу. Теперь понятно, что нужно сделать – выписать по возрастанию все четырехзначные числа, содержащие по одной цифре 1, 2, 3 и 4, такие, что никакая цифра не стоит на позиции со своим номером.

Эти числа выписаны ниже под чертой (рис. 6). Красные цифры над чертой – номер позиции (номер гостя), с которым не должна совпадать цифра в соответствующем столбце (номер шляпы).

Как видим, всего имеется 9 вариантов нужной раздачи шляп. Вариантов может быть довольно много, но в некоторых случаях, тем не менее, самый быстрый способ решения задачи – разумно организованный перебор.

1	2	3	4
2	1	4	3
2	3	4	1
2	4	1	3
3	1	4	2
3	4	1	2
3	4	2	1
4	1	2	3
4	3	1	2
4	3	2	1

Рис. 6. Комбинации шляп и гостей

Заключение. Мы рассмотрели некоторые нестандартные методы и приемы, которые будут полезны при решении олимпиадных задач. Моделирование условия задачи с помощью графов позволяет устанавливать различные связи и отношения между данными и искомыми величинами задачи, позволяет лучше осознать идею решения, его логику, увидеть различные способы решения задачи. Также составление графов является увлекательным занятием.

По мнению Г.Х. Воистиновой и Л.З. Зариповой [1, с. 114], методы дискретной математики используются при решении олимпиадных задач, которые требуют детального анализа условия и требования задачи, представляющих собой дискретные объекты, такие как целые числа, графы, комбинаторные объекты и т.д. Они позволяют разбить задачу на более простые компоненты и применять математические методы для их решения. Кроме того, методы дискретной математики могут помочь определить оптимальные решения и оценить сложность алгоритмов. В целом, использование методов дискретной математики позволяет решать олимпиадные задачи более эффективно и быстро.

Библиографический список

1. Барболин М. Головоломки и графы // Научно-популярный физико-математический журнал «Квант». – 1994. – № 6. – С. 33.
2. Березина Л.Ю. Графы и их применение: Пособие для учителей. – М.: Просвещение, 2001 – 143 с.
3. Виленкин Н.Я. Комбинаторика / Н.Я. Виленкин [и др.]. – М.: МЦНМО, 2013. – 180 с.
4. Воистинова Г.Х., Зарипова Л.З. О нетривиальном приеме решения олимпиадных задач по математике // Математическое моделирование процессов и систем: Материалы XII Межд. молодежн. науч.-практ. конф. Часть 1, 17-19 ноября 2022 г., г. Стерлитамак / отв. ред. С.В. Викторов. – Стерлитамак: Стерлитамакский филиал УУНиТ, 2022. – С. 110-115.
5. Горбачев В.Г. Сборник олимпиадных задач по. – М., 2004. – 56 с.
6. Мельников О. И. Теория графов в занимательных задачах. – Изд. 3-е. – М.: КомКнига, 2009. – 232 с.
7. Фридман Л.М., Турецкий Е.Н. Как научиться решать задачи: Книга для учащихся ст. классов сред. шк. – М.: Просвещение, 1989. – 192 с.
8. Яковлев И.В. Комбинаторика для олимпиадников. – М.: МЦНМО, 2014. – 80 с.

SOLVING OLYMPIAD PROBLEMS BY METHODS OF DISCRETE MATHEMATICS

M.I. Mukhametova, *Student*
G.H. Voistinova, *Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor*
Sterlitamak Branch of Ufa University of Science and Technology
(Russia, Sterlitamak)

Abstract. *The article reveals some methods of solving Olympiad problems by means of discrete mathematics. The advantage of owning different methods and methods of solving such problems and determining the optimal one is emphasized. Olympiad tasks require a non-standard approach. A student who is familiar not only with standard ways of solving problems, but also with techniques that go beyond the school course can successfully participate in the math Olympiad.*

Keywords: *olympiad problems, solution methods, graphs, combinatorics.*