ОДИН БЫСТРЫЙ МЕТОД ПРИВЕДЕНИЯ КВАДРАТИЧНЫХ ФОРМ К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ

С.В. Баранов, *студент*
Научный руководитель: *А.В. Медведев, д-р физ.-мат. наук, профессор*
Кемеровский государственный университет
(Россия, г. Кемерово)

DOI:10.24412/2500-1000-2023-7-2-74-76

Аннотация. *В данной статье рассмотрен матричный метод нахождения линейной замены переменных, приводящей квадратичную форму к каноническому виду. Проведен анализ дифференциальных уравнений 2-го порядка и их системы. На основании проведенного исследования акцентированы положительные стороны описанного приема для обучающихся информационно-технологического профиля.*

Ключевые слова: *метод, квадратичная форма, канонический вид, матрица, минор.*

При решении задач экономического содержания, в частности, при анализе инвестиционных портфелей часто используются квадратичные формы или суммы алгебраических слагаемых второй степени. Говорят, что квадратичная форма имеет канонический вид, если ее матрица диагональная, другими словами, в квадратичной форме имеются только члены с квадратами переменных, а все попарные произведения различных переменных отсутствуют (то есть соответствующие им коэффициенты равны нулю). По каноническому виду квадратичных форм классифицируются кривые и поверхности, дифференциальные уравнения 2-го порядка и их системы и другие объекты математики, с помощью которых описываются важные прикладные задачи, что оставляет всегда актуальным вопрос приведения квадратичных форм к каноническому виду.

Целью данной работы является демонстрация применения одного матричного метода, позволяющего найти линейное преобразование координат, приводящего квадратичную форму к каноническому виду.

Рассмотрим следующий пример. Пусть дана квадратичная форма (к.ф.):

$$9x^2+6y^2+6z^2+12xy-10xz\,. \tag{1}$$

Сначала приведем ее к каноническому виду методом Лагранжа (выделения полных квадратов [1]) с условием, что, перед выделением полного квадрата по текущей переменной, перед ней предварительно формируется коэффициент 1:

$$9x^2+6y^2+6z^2+12xy-10xz=9\left(x^2+\frac{2}{3}y^2+\frac{2}{3}z^2+\frac{4}{3}xy+0\cdot yz-\frac{10}{9}xz\right)=$$

$$=9\left(\left(x+\frac{2}{3}y-\frac{5}{9}z\right)^2-\frac{2}{9}y^2+\frac{2}{3}z^2+\frac{4}{3}xy-\frac{10}{9}xz\right)=9\left(x'^2+\frac{2}{9}\left(y^2+\frac{29}{18}z^2+\frac{10}{3}yz\right)\right)=$$

$$=9\left(x'^2+\frac{2}{9}\left(\left(y+\frac{5}{3}z\right)^2-\frac{21}{18}z^2\right)\right)=9x'^2+2y'^2-\frac{7}{3}z'^2 \quad ,(2)$$

где замена переменных, приводящая к.ф. к каноническому виду (2) имеет вид:

$$\begin{cases} x' = x + \frac{2}{3}y + \frac{5}{9}z \\ y' = y + \frac{5}{3}z \\ z' = z \end{cases}, \tag{3}$$

а ее матрица –

$$\begin{pmatrix} 1 & 2/3 & -5/9 \\ 0 & 1 & 5/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Рассмотрим матрицу исходной к.ф.:

$$\begin{pmatrix} 9 & 6 & -5 \\ 6 & 6 & 0 \\ -5 & 0 & 6 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Приведем эту матрицу к ступенчатому виду методом Гаусса (разновидность текущего минора [2]):

$$\begin{pmatrix} 9 & 6 & -5 \\ 6 & 6 & 0 \\ -5 & 0 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 9 & 6 & -5 \\ 1 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 9 & 6 & -5 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 30 & 29 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 9 & 6 & -5 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -63 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2/3 & -5/9 \\ 0 & 1 & 5/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{6}$$

При последнем преобразовании каждая строка полученной ступенчатой матрицы разделена на ее диагональный элемент. Нетрудно убедиться, что элементы строк последней матрицы являются коэффициентами линейной замены переменных, приведшей к.ф. (1) к каноническому виду и, соответственно, совпадают с матрицей (4).

Таким образом, без применения метода Лагранжа матричным методом найдена линейная замена переменных, приводящая к.ф. к каноническому виду. Отметим, что выражения старых переменных (x,y,z) через новые ($x`,y`,z`$) можно получить из системы (3) с помощью обратного хода метода Гаусса. После подстановки новых переменных в выражение исходной квадратичной формы, в соответствии с найденным линейным преобразованием старых координат в новые, можно получить канонический вид к.ф., независимо от размерности пространства, в котором она задана. Полученный результат был проверен на нескольких примерах, причем выдвигаемая гипотеза в них была подтверждена.

Так как решение указанной задачи осуществляется с использованием матричного метода, как правило, имеющего алгоритмическую формализацию на компьютере, то полученный результат позволяет аналитику, при необходимости, автоматизировано получить замену переменных, приводящую к.ф. к каноническому виду, а преподавателю – облегчить освещение такой важной темы в преподавании высшей математики, как «Приведение квадратичных форм к каноническому виду», особенно для обучающихся информационно-технологического профиля.

Библиографический список

1. Утешев А.Ю. «Квадратичная форма», «Метод Лагранжа привидения квадратичной формы к каноническому виду». – [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://vmath.ru/vf5/_export/xhtml/2form#kvadratichnaja_forma (Дата просмотра 12.01.2023).

2. Аналитическая геометрия и линейная алгебра: учебно-методическое пособие / сост. А.В. Медведев; Кемеровский государственный университет. – Кемерово: КемГУ, 2021. – 106 с.

ONE QUICK METHOD FOR REDUCING QUADRATIC FORMS TO THE CANONICAL FORM

S.V. Baranov, *Student*
Supervisor: *A.V. Medvedev, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor*
Kemerovo State University
(Russia, Kemerovo)

Abstract. *This article considers a matrix method for finding a linear change of variables that reduces a quadratic form to a canonical form. The analysis of differential equations of the 2nd order and their system is carried out. On the basis of the study, the positive aspects of the described technique for students of the information technology profile are accentuated.*

Keywords: *method, quadratic form, canonical form, matrix, minor.*