ПОСТРОЕНИЕ ОЦЕНОК ОБЛАСТЕЙ ПРИТЯЖЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ УРАВНЕНИЙ ЛЯПУНОВА

Д.Н. Соколов, *студент*
Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана (Россия, г. Москва)

DOI:10.24412/2500-1000-2023-4-4-190-195

Аннотация. *В данной статье рассматривается нелинейная система и исследуется ее устойчивость с помощью квадратичной функции Ляпунова. Кроме того, проводится оценка области притяжения нулевого положения равновесия с помощью решения задачи условной оптимизации. Полученная оптимизационная задача решается графическим методом и проводятся вычислительные эксперименты для проверки правильности нахождения полученной области.*

Ключевые слова: *дифференциальные уравнения, квадратичная функция Ляпунова, асимптотическая устойчивость, область притяжения нулевого положения равновесия системы.*

I. Доказательство асимптотической устойчивости нулевого положения равновесия системы

Используя квадратичную функцию Ляпунова, докажем асимптотическую устойчивость нулевого положения равновесия системы [1, с. 228]

$$\begin{cases} \dot{x} = -y, \\ \dot{y} = x + (x^2 - 1)y. \end{cases}$$

Правая часть системы описывается вектор-функцией

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} -y \\ x + (x^2 - 1)y \end{pmatrix}.$$

Матрица Якоби этой функции имеет вид [2, стр. 72]:

$$\frac{\partial f}{\partial (x, y)} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 + 2xy & -1 \end{pmatrix}.$$

А значит, матрица линейного приближения системы

$$A = \frac{\partial f}{\partial (x, y)}(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Значит, система первого приближения [1, с. 245] имеет вид $\begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = x - y \end{cases}$.

Функцию Ляпунова найдем в виде квадратичной формы с матрицей

$$L = \begin{pmatrix} l_1 & l_2 \\ l_2 & l_3 \end{pmatrix}.$$

При этом L – решение уравнения Ляпунова $A^T L + LA = -W$, где $W = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

$$A^T L = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} l_1 & l_2 \\ l_2 & l_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_2 & l_3 \\ -l_1 - l_2 & -l_2 - l_3 \end{pmatrix}$$

$$LA = \begin{pmatrix} l_1 & l_2 \\ l_2 & l_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_2 & -l_1 - l_2 \\ l_3 & -l_2 - l_3 \end{pmatrix}$$

$$A^T L + LA = \begin{pmatrix} l_2 & l_3 \\ -l_1 - l_2 & -l_2 - l_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l_2 & -l_1 - l_2 \\ l_3 & -l_2 - l_3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 2l_2 & -l_1 - l_2 + l_3 \\ -l_1 - l_2 + l_3 & -2(l_2 + l_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Получим систему линейных уравнений:

$\begin{cases} 2l_2 = -2 \\ -l_1 - l_2 + l_3 = 0 \\ -2(l_2 + l_3) = -2 \end{cases}$, решение которой $l_1 = 3, l_2 = -1, l_3 = 2$.

Следовательно, $L = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, а значит, функция Ляпунова для этой системы имеет вид

$$V(x, y) = 3x^2 - 2xy + 2y^2.$$

Проверим положительную определенность матрицы L по критерию Сильвестра:

$\Delta_1 = 3 > 0$; $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 5 > 0$,

а значит, квадратичная форма $V(x, y)$ положительно определена.

Значит, нулевое положение равновесия системы первого приближения асимптотически устойчиво.

II. Оценка области притяжения нулевого положения равновесия системы

Найдем производную $V(x, y)$ в силу системы:

$$\dot{V}(x, y) = (6x - 2y)\dot{x} + (-2x + 4y)\dot{y} =$$
$$= (6x - 2y)(-y) + (-2x + 4y)(x + (x^2 - 1)y) =$$
$$= -6xy + 2y^2 - 2x^2 + 4xy - 2xy(x^2 - 1) + 4y^2(x^2 - 1) =$$
$$= 2y^2 - 2x^2 - 2xy - 2x^3y + 2xy + 4x^2y^2 - 4y^2 =$$
$$= -2x^2 - 2y^2 - 2x^3y + 4x^2y^2.$$

Определим константу C из условия:

$$C = \min_{\substack{\dot{V}=0 \\ (x,y)\neq(0,0)}} V(x, y) = \min_{\substack{-2x^2-2y^2 \\ -2x^3y+4x^2y^2=0 \\ (x,y)\neq(0,0)}} (3x^2 - 2xy + 2y^2).$$

Получаем задачу условной минимизации:

$$\begin{cases} V(x, y) = 3x^2 - 2xy + 2y^2 \to min \\ -2x^2 - 2y^2 - 2x^3y + 4x^2y^2 = 0 \\ x^2 + y^2 > 0 \end{cases}.$$

Попытка аналитического решения задачи приводит к системе нелинейных уравнений, которая не решается аналитически. Поэтому найдем решение этой задачи с помощью графического калькулятора Desmos (https://www.desmos.com).

В результате установлено приблизительное значение константы C ≈ 4.6.

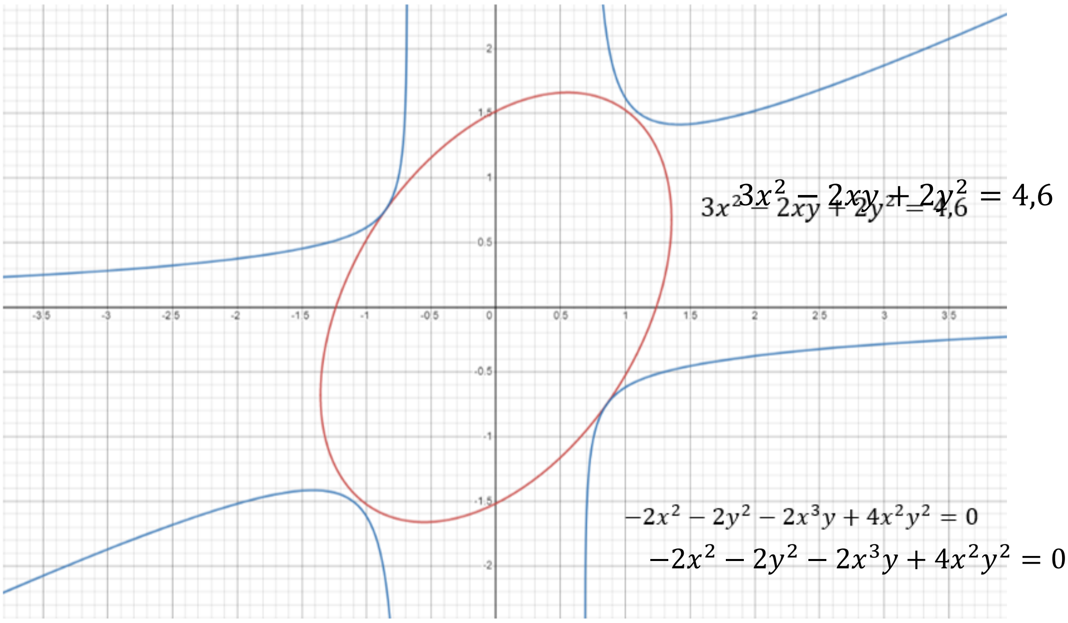

Рис. 1. Оценка области притяжения нулевого положения равновесия системы в графическом калькуляторе Desmos

Проведем вычислительный эксперимент, чтобы убедиться, что нулевое положение равновесия системы действительно имеет область притяжения, ограниченную уравнением $3x^2 - 2xy + 2y^2 = 4,6$.

Для этого выберем несколько начальных состояний, которые находятся внутри полученного эллипса, с шагом 0,5, за исключением начала координат. Все начальные состояния, которые были выбраны для вычислительного эксперимента, отражены в таблице 1.

Таблица 1. Координаты начальных точек, выбранных для вычислительного эксперимента

№ точки	$[x_0, y_0]$	№ точки	$[x_0, y_0]$	№ точки	$[x_0, y_0]$	№ точки	$[x_0, y_0]$
1	[-1,0]	8	[0.5,0.5]	15	[0.5,1.5]	22	[-1,-1]
2	[-0.5,0]	9	[1,0.5]	16	[1,1.5]	23	[-0.5,-1]
3	[0.5,0]	10	[-0.5,1]	17	[-1,-0.5]	24	[0,-1]
4	[1,0]	11	[0,1]	18	[-0.5,-0.5]	25	[0.5,-1]
5	[-1,0.5]	12	[0.5,1]	19	[0,-0.5]	26	[-1,-1.5]
6	[-0.5,0.5]	13	[1,1]	20	[0.5,-0.5]	27	[-0.5,-1.5]
7	[0,0.5]	14	[0,1.5]	21	[1,-0.5]	28	[0,-1.5]

```
%initial conditions
initmas = [-1 0;-0.5 0;0.5 0;1 0;-1 0.5; -0.5 0.5; ...
    0 0.5;0.5 0.5;1 0.5;...
    -0.5 1;0 1;0.5 1;1 1;0 1.5; 0.5 1.5; 1 1.5; ...
    -1 -0.5; -0.5 -0.5; 0 -0.5; ...
    0.5 -0.5;1 -0.5; -1 -1; -0.5 -1;0 -1; 0.5 -1; ...
    -1 -1.5; -0.5 -1.5; 0 -1.5]';

%integrating
t0 = 0; tf = 15;
tspan = t0:0.05:tf;
Xmas = zeros(size(initmas,2),size(tspan,2));
Ymas = zeros(size(initmas,2),size(tspan,2));
for k = 1:size(initmas,2)
    state0 = initmas(:,k);
    [Tcom,Soltek] = ode45(@prstate, tspan, state0);
    Xmas(k,:) = Soltek(:,1);
    Ymas(k,:) = Soltek(:,2);
end

%plot
figure
for k = 1:size(initmas,2)
    plot(Xmas(k,:), Ymas(k,:), 'black','LineWidth',1.5);
    hold on
end
ezplot('3*x.^2-2*x.*y+2*y.^2 - 4.6');
grid on
axis equal
axis([-2 2 -2 2]);
set(gcf,'Color','w');
set(gca,'Color','w');
set(gca,'FontSize',16);
function z = prstate(~, state)
%prstate computes the right side of the equation

z = zeros(2,1);
z(1) = -state(2);
z(2) = state(1) + (state(1)^2 - 1)*state(2);

end
```

Рис. 2. Листинг программы в системе MATLAB

Фазовые траектории исходной системы при различных начальных состояниях изображены на рисунке 3.

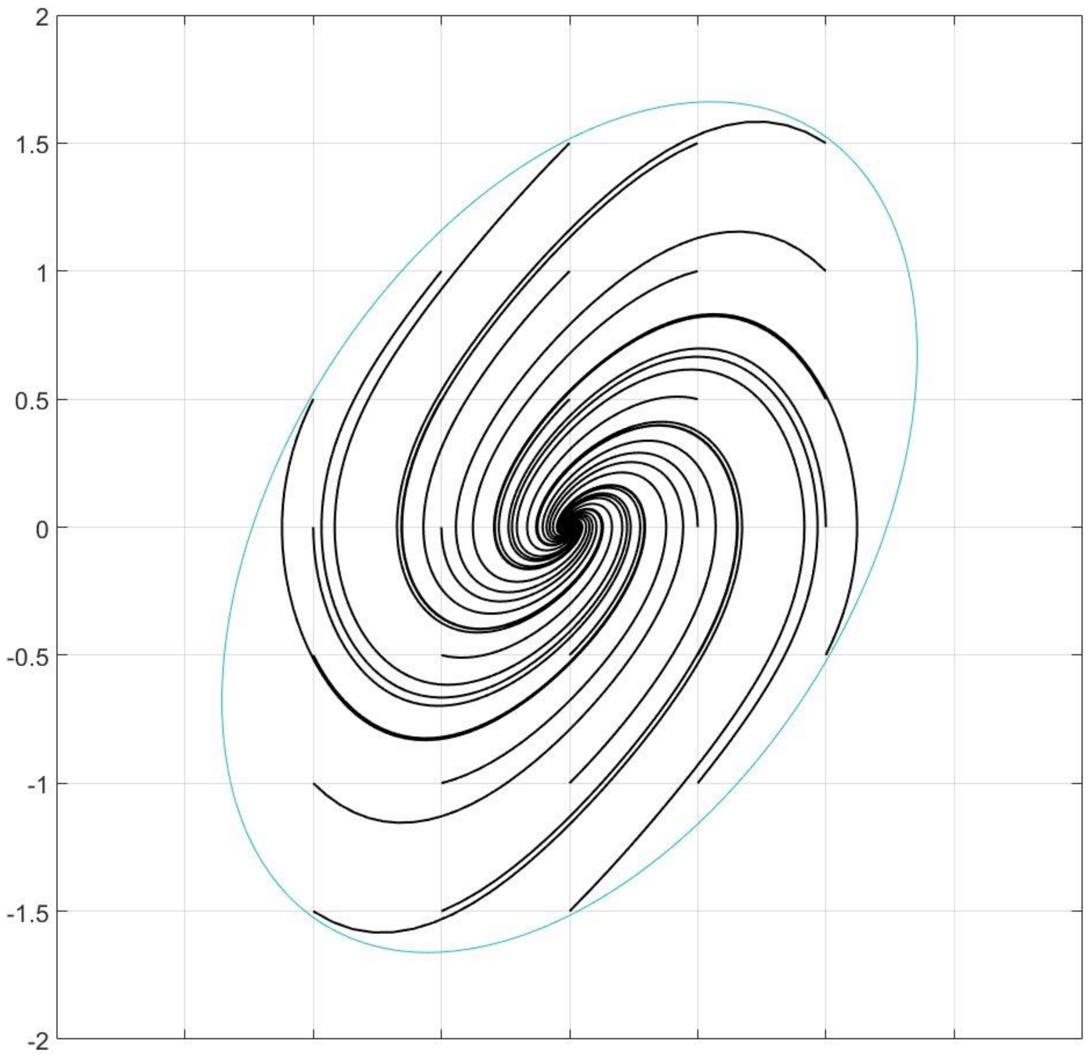

Рис. 3. Фазовые траектории системы при всех выбранных начальных состояниях. Цветом выделен эллипс, ограничивающий область притяжения положения равновесия

Рисунок, полученный по результатам проведения вычислительного эксперимента, показывает, что все траектории, которые начинаются внутри эллипса, стремятся к нулевому положению равновесия.

Таким образом, оценка области притяжения положения равновесия корректна.

Заключение. В работе была рассмотрена нелинейная система, которая имеет положение равновесия в начале координат. Была найдена функция Ляпунова в виде квадратичной формы и показано, что нулевое положение равновесия является асимптотически устойчивым. Для оценки области притяжения положения равновесия была составлена оптимизационная задача, для которой было найдено приблизительное решение. Проведенные вычислительные эксперименты продемонстрировали корректность найденной области притяжения.

Библиографический список

1. Агафонов, С.А. Математика в техническом университете: учебник: в 21 выпуск / С.А. Агафонов, А.Д. Герман, Т.В. Муратова. – 5-е изд., стер. – М.: МГТУ им. Баумана, 2007 – Выпуск 8: Дифференциальные уравнения – 2011. – 347 с. – ISBN 978-5-7038-2484-2.

2. Канатников, А. Н. Математика в техническом университете: учебник: в 21 выпуск / А.Н. Канатников, А. П. Крищенко, В. Н. Четвериков. – 3-е изд., испр. – М.: МГТУ им. Баумана, 2007. – Выпуск 5: Дифференциальное исчисление функций многих переменных. – 2007. – 456 с. – ISBN 978-5-7038-3014-7.

3. Поляк Б.Т. Робастная устойчивость и управление / Б.Т. Поляк, П.С. Щербаков; РАН. Ин-т проблем управления. – М.: Наука, 2002. – 303 с. – ISBN 5-02-002561-5.

4. Ким, Д.П. Теория автоматического управления: учебник. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. – Том 1: Линейные системы. – 2007. – 312 с. – ISBN 978-5-9221-0857-7.

CONSTRUCTION OF ATTRACTION DOMAIN ESTIMATES USING THE LYAPUNOV EQUATIONS

D.N. Sokolov, *Student*
Bauman Moscow State Technical University
(Russia, Moscow)

Abstract. *In this article, a nonlinear system is considered and its stability is studied using the quadratic Lyapunov function. In addition, the area of attraction of the zero equilibrium position is estimated by solving the problem of conditional optimization. The resulting optimization problem is solved by a graphical method and computational experiments are carried out to verify the correctness of finding the obtained area.*

Keywords: *differential equations, quadratic Lyapunov function, asymptotic stability, domain of attraction of the zero equilibrium position of the system.*