ИСТОРИЯ И СЧЕТ ЕГИПЕТСКИХ ДРОБЕЙ В ДРЕВНЕМ ЕГИПТЕ

М.Ю. Солощенко, *канд. пед. наук, доцент*
Ф.Г. Забиров, *студент*
З.З. Мурзалиева, *студент*
Стерлитамакский филиал Уфимского университета науки и технологий (Россия, г. Стерлитамак)

DOI:10.24412/2500-1000-2023-3-2-133-136

Аннотация. *В статье описано краткая история возникновения египетских дробей, также приводится анализ представления и способ счета рациональных чисел во времена Древнего Египта. Статья опирается на информацию с папируса Райнда содержащую таблицу, которая, выражает дроби формы $\frac{2}{n}$ как суммы две, три или четыре единичные дроби с разными знаменателями.*

Ключевые слова: *Египетские дроби, история возникновения дробей, математика древнего Египта, рациональные числа в древние времена, папирус Райнда.*

Представление рациональных чисел в виде сумм единичных дробей начинаются со времен Древнего Египта. Сегодня эта тема сохранилась в основном как источник математических головоломок и задач абстрактной теории чисел, но эта тема представляет исторический и антропологический интерес, поскольку проливает свет на мыслительные процессы людей, живших в древние времена.

В начале почти каждой истории математики ученые находят описание того, как древние египтяне оперировали дробями в единичных долях. Например, вместо того, чтобы сказать, что $\frac{2}{5}$ моей земли было затоплено, они говорили, что $\frac{1}{3}+\frac{1}{15}$ моей земли было затоплено. Одна из самых ранних письменных записей из Древнего Египта (переписанная примерно в 1650 г. до н.э. из источника, который, как считается, датируется примерно 1850 г. до н.э. или ранее) известна как Математический папирус Райнда [1]. Папирус содержит таблицу, выражающую дроби формы $\frac{2}{n}$ как суммы две, три или четыре единичные дроби с разными знаменателями. Таблица охватывает $\frac{2}{n}$ для n до 101, хотя дроби с «четными» знаменателями, например, $\frac{2}{4}$, $\frac{2}{6}$ и т. д., опущены, показывая, что египтяне ясно осознавали очевидную эквивалентность с сокращенными формами. $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ и т.д.

Из оставшихся значений таблицы, $\frac{2}{5}$ присвоили выражение $\frac{1}{3}+\frac{1}{15}$. Всем другим знаменателям таблицы, кроме одного, которые делятся на 5, присваивается простое кратное этому выражению, т. е. для $\frac{2}{5k}$ используется $\frac{1}{3k}+\frac{1}{15k}$. Точно так же присвоили $\frac{1}{4}+\frac{1}{28}$ элементу таблицы $\frac{2}{7}$, а затем отсеяли все оставшиеся знаменатели, делящиеся на 7, используя выражения вида $\frac{1}{4k}+\frac{1}{28k}$. Наконец, они присвоили $\frac{1}{6}+\frac{1}{66}$ элементу таблицы $\frac{2}{11}$, а затем использовали $\frac{1}{6k}+\frac{1}{66k}$ для $\frac{2}{11k}$ где $k = 5$.

Для каждого из малых простых чисел 3, 5, 7, 11 египтяне выражали $\frac{2}{p}$ как сумму двух единичных дробей, используя простую формулу

$$\frac{2}{p}=\frac{1}{(p+1)/2}+\frac{1}{p(p+1)/2} \quad (1)$$

Как только эти простые числа и их кратные были известны, определяли представления с использованием тождества

$$\frac{2}{p} = \frac{1}{a} + \frac{2a - p}{ap} \quad (2)$$

где a — некоторое удобное «круглое» число, большее $\frac{p}{2}$.

Чтобы найти остальные члены, разбивали величину $2a - p$ на одну, две или три различные части так, чтобы каждая часть была делителем числа а. Например, при $n = 89$ выбрали $a = 60$, что дает разность 31. Таким образом, выражали число 31 как сумма трех или менее различных целых чисел, каждое из которых делит 60. Одно такое разбиение равно $31 = 15 + 10 + 6$, что приводит к представлению, которое появляется в папирусе Райнда для $\frac{2}{89}$:

$$\frac{2}{89} = \frac{1}{60} + \frac{1}{356} + \frac{1}{534} + \frac{1}{890}$$

На этой основе обобщали таблицу $\frac{2}{n}$ в папирусе Райнда, указав значения a, b, $(c, (d))$ для каждого простого числа p, такого что $\frac{2}{p} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \left(\frac{1}{c} + \left(\frac{1}{d}\right)\right)$. Значения представлены в таблице ниже (табл. 1).

Таблица 1. Краткое изложение значений в папирусе Райда $\frac{2}{n}$

p	$2a - p$	a	b	c	d
3	1	2	6		
5	1	3	15		
7	1	4	28		
11	1	6	66		
23	1	12	276		
13	3	8	52	104	
17	7	12	51	68	
19	5	12	76	114	
31	9	20	124	155	
37	11	24	111	296	
41	7	24	246	328	
47	13	30	141	470	
53	7	30	318	795	
59	13	36	236	531	
67	13	40	335	536	
71	9	40	568	710	
97	15	56	679	776	
29	19	24	58	174	32
43	41	42	86	123	01
61	19	60	244	488	10
73	47	60	219	292	35
79	41	60	237	316	90
83	37	60	332	415	98
89	31	60	356	534	90
35	25	30	42		
91	49	70	130		
95	25	60	380	570	
101	1111	606	101	202	03

Представленная таблица (табл. 1) показывает две вещи. Во-первых, египтяне использовали формулы (2) для определения своих общих представлений единичной дроби $\frac{2}{p}$, где p большое простое число.

Во-вторых, объяснения четырех исключительных случаев. Первые три – это составные числа 35, 91 и 95, которые по каким-то причинам не были отсеяны из таблицы. Случай $\frac{2}{95} = \frac{2}{5*19}$ должен был быть отсеян малым простым числом $p = 5$, что дает ему представление $\frac{1}{3k} + \frac{1}{15k}$ с $k = 19$. Вместо этого получается, что его представление явно основано на простом числе $p = 19$, т. е. оно имеет вид $\frac{1}{12k} + \frac{1}{76k} + \frac{1}{114k}$ при $k = 5$.

Случаи $\frac{2}{35}$ и $\frac{2}{91}$ еще более необычны. Это единственные две дроби, представления которых не являются простыми кратными чисел одного из их простых множителей. В этих двух случаях египтяне, вернулись от обычного мультипликативного разложения к тому, что можно было бы назвать «гармонически-арифметическим» разложением [2].

Среднее арифметическое: $A(p,q) = \frac{p+q}{2}$

Среднее геометрическое: $G(p,q) = \sqrt{pq}$

Гармоническое среднее: $H(p,q) = \frac{2}{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}$

Гармоническое среднее, выглядит египетским, учитывая их близость к единичным дробям. В любом случае $G(p,q)$ это не только среднее геометрическое p и q, но и среднее геометрическое $A(p,q)$ и $H(p,q)$, что следует просто потому, что

$$pq = A(p,q) * H(p,q)$$

Другими словами, $A * H$ дает альтернативное разложение составного числа pq. Это приводит к формуле

$$\frac{2}{pq} = \frac{2}{A(p,q)H(p,q)} = \left(\frac{2}{p+q}\right)\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) \quad (3)$$

где, старший множитель справа — это дробь единицы, потому что $p + q$ четное.

Формула дает представления папируса Райнда.

$$\frac{2}{5*7} = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right) = \frac{1}{30} + \frac{1}{42}$$
$$\frac{2}{7*13} = \frac{1}{10}\left(\frac{1}{7} + \frac{1}{13}\right) = \frac{1}{70} + \frac{1}{130}$$

Таким образом, каждая составная запись в таблице папирусе Райнда $\frac{2}{n}$ основана на разложении числа n на его простые множители. В большинстве случаев использовалась простая геометрическая факторизация pq, но в двух случаях использовал произведение $A * H$. Это оставляет только последнюю запись в таблице $\frac{2}{n}$

$$\frac{2}{101} = \frac{1}{101} + \frac{1}{202} + \frac{1}{303} + \frac{1}{606}$$

Запись построена по формуле (2) с $a = 606$ и разбиением $1111 = 202 + 303 + 606$, но она выделяется среди других записей таблицы тем, что она кратна $\frac{1}{n}$. Возможно, эта запись была просто формальностью, предполагающей, что для любого n, не включенного в таблицу (т. е. больше 100), используется четырехчленное разложение:

$$\frac{2}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n} + \frac{1}{6n} \qquad (4)$$

Таким образом, это фактически «завершает» таблицу, позволяя сказать, что она обеспечивает представление единичной дроби $\frac{2}{n}$ для *всех* целых чисел n. Интересно, что формулу (4) можно рассматривать как иллюстрацию «совершенства» числа 6 в том смысле, что сумма делителей равна удвоенному числу, т. е. $1 + 2 + 3 + 6 = 12 = 2 * 6$.

Можно сделать вывод что, таблица $\frac{2}{n}$ в папирусе Райнда, датируемая более чем за тысячу лет до Пифагора, показывает знание простых и составных чисел, грубую версию «Решета Эратосфена», знание арифметические, геометрические и гармонические средства. Все это показывает о большом знание чисел у древних египтян.

Библиографический список

1. Robins G., Shute C. The Rhind Mathematical Papyrus: An Ancient Egyptian Text. – British Museum Press. 1st ed. 1987. – 88 p.
2. Guy R. Unsolved Problems in Number Theory. – Springer. 3rd ed. 2004. – 456 p.

HISTORY AND COUNTING OF EGYPTIAN FRACTIONS IN ANCIENT EGYPT

M.Yu. Soloshchenko, *Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor*
F.G. Zabirov, *Student*
Z.Z. Murzalieva, *Student*
Sterlitamak branch of the Ufa University of Science and Technology
(Russia, Sterlitamak)

Abstract. *The article describes a brief history of the emergence of Egyptian fractions, also provides an analysis of the representation and method of counting rational numbers in ancient Egypt. The article is based on information from the Rhind papyrus containing a table that expresses fractions of the form 2/n as sums of two, three or four unit fractions with different denominators.*

Keywords: *Egyptian fractions, the history of fractions, the mathematics of ancient Egypt, rational numbers in ancient times, the Rhind papyrus.*