ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ В ОЛИМПИАДНЫХ ЗАДАЧАХ ПО МАТЕМАТИКЕ

С.Ю. Семенова, *студент*
Д.Р. Раянова, *студент*
М.Ю. Солощенко, *канд. пед. наук, доцент*
Стерлитамакский филиал Уфимского университета науки и технологий (Россия, г. Стерлитамак)

DOI:10.24412/2500-1000-2023-3-1-127-130

Аннотация. *Статья посвящена рассмотрению элементов теории чисел в олимпиадных задачах по математике. На основе приведенного примера внеурочного мероприятия «математический бой» по подготовке к олимпиаде был сделан вывод о том, что подобная внеурочная деятельность положительно сказывается на интересе учеников к предмету.*

Ключевые слова: *теория чисел, математическая олимпиада, методика обучения, математика, олимпиадная задача.*

Образование занимает одну из важнейших ступеней в жизни людей, оно развивается, для человечества открываются все больше новых сфер и возможностей для обучения и изучения. Сейчас, как и раньше, перед школьным образованием стоит задача – мотивировать школьников углубляться в изучение определенных дисциплин, чтобы достичь в них высоких результатов, найти и отобрать способных учащихся, которые смогут в будущем стать конкурентноспособными личностями.

Этому всему способствует проведение олимпиад по разным школьным предметам, направленные на воспитание личностей, которые будут гармонически развитыми, стремящиеся к аналитическому и дедуктивному мышлению, способные решить любые трудности и поставленные проблемы в задачах перед ними.

Математическая олимпиада – это предметная олимпиада по решению нестандартных между учащимися школы (иногда студентами ВУЗов) по решению специфических математических задач на различные темы [4].

Задача олимпиады – это не только отобрать лучших из лучших, выявить одаренных, но и создать такие условия, при которых атмосфера во время проведения мероприятия не будет давить, а наоборот, поможет повысить желание к развитию интереса решения проблемных моментов и самостоятельности мышления.

Перед тем, как ученик отправляется на олимпиаду в качестве участника, требуется компетентность учителя, который сможет уделить должное внимание предварительной подготовке учащихся.

По словам А.В. Аракелова, который описывал эффективные способы внедрения олимпиадных задач в структуры уроков: «необходимо, чтобы эти задачи были с динамическим уровнем трудности и сложности (принцип развития задачи). Например, первую часть задачи решат многие, но полное решение с обоснованием доступно далеко не всем. Также легко развивается содержание многих задач (выход на исследовательский уровень)» [3].

Во время урока в любой момент можно найти место для заданий, которые будут всесторонне развивать учеников, причем вне зависимости от возрастной категории. Запланированная программа занятий может включать в себя рассмотрение интересных задач, ребусов, анаграмм, криптограмм, софизмов, задач прикладного характера.

Для того чтобы ученики полноценно раскрывали свой потенциал с самого начала, начали проводиться дополнительные занятия в математических кружках. Основная цель математического кружка – объединение учеников различной возрастной категории под руководством педагога, чтобы систематически проводить внеклассные уроки с будущими олимпиадниками по решению задач, которые основаны по большей мере на вычислении счетов, в навыках быстрых и безошибочных подсчетов, проведении конкурсов и викторин, которые в первую очередь тесно переплетаются с миром математики.

Математический кружок для ребенка становится прекрасной подготовкой к участию в масштабных конкурсах на проверку знаний, а также повышает интерес к математике в целом. Н.В. Русанов пишет: «Проводя олимпиады, мы установили, что лучших результатов добиваются ребята тех учителей, которые руководят занятиями кружка. Причем участие детей в олимпиаде хорошо вписывается в программу его занятий» [3].

Во время прохождения педагогической практики нами было решено провести внеурочное мероприятие «математический бой», посвященное подготовке к олимпиаде. За основу заданий были взяты элементы теории чисел, на которые мы делали упор. Мотивацией за участие становились хорошие оценки в случае хороших и удовлетворительных результатов.

В ходе мероприятия класс был разделён на команды, после чего каждой команде были предоставлены карточки с олимпиадными заданиями, которые в течении определённого времени они решали. По истечению времени ответы участников на задачи были отданы судьям, то есть нам, на проверку и оценку.

После того, как мы подвели итоги результатов и выявили победителей, мы решили тут же на доске объяснить каждую из задач, чтобы те, кто не справились во время математического боя, могли в будущем воспользоваться полученными знаниями или же закрепить предоставленный материал.

Рассмотрим примеры решения олимпиадных задач по теории чисел, которые были в карточках для математического боя.

1. Задачи на делимость:

Олимпиадные задачи указанных тем предполагают выход на более высокий уровень знаний. Н.В. Горбачев предлагает задания на признаки делимости, для решения которых необходимы знания разложения на множители, умение решения квадратных и биквадратных уравнений. Именно их мы решили взять за основу и подобрали наиболее подходящие под описание задачи. Приведем примеры указанных задач.

Задача 1. Вася написал на доске пример умножения двух двузначных чисел, заменив в нем одинаковые цифры одинаковыми буквами. В итоге у него. Докажите, что он где-то ошибся [3].

Данный пример можно решить несколькими способами. Самый простой требует знаний признаков делимости на 11.

Решение. Число ДДЕЕ делится на 11, так как: ДДЕЕ = 1100·Д + 11·Е = 11·(100·Д + Е). 11 – это простое число, значит, на него должен делится хотя бы один из сомножителей слева. Однако АБ и ВГ, очевидно, на 11 не делятся, так как состоят из разных цифр. Таким образом, Вася где-то ошибся в записи.

Задача 2. Сумма цифр трехзначного числа равна 7. Доказать, что число делится на 7 тогда и только тогда, когда равны цифры его десятков и единиц.

Решение. Число делится на 7 тогда и только тогда, когда результат вычитания удвоенной последней цифры из этого числа без последней цифры делится на 7. Пусть 1-я цифра - m, 2-я и 3-я цифра - k. Тогда исходное число mkk, причем $m + k + k = 7$ и отсюда $m = 7 - 2k$. Число без последней цифры mk. Отнимаем удвоенную последнюю цифру $m \cdot 10 + k - 2k = (7 - 2k) \cdot 10 - k = 7(10 - 3k)$. Данное выражение делится на 7, и, следовательно, исходное число делится на 7.

Задача 3. Доказать, что $1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{1990}$не делится на 3.

Решение. $1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{1990}$ – геометрическая прогрессия со знаменателем 2 и числом членов 1990. Их сумма $S = 1\,(2^{1991} - 1)/(2 - 1) = 2^{1991} - 1$. С другой стороны, $1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{1990} = 3 + 2^2 + \ldots + 2^{1990} = 3 + 2\mathrm{k}$ не делится на 3. Таким образом, $1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{1990}$ не может делиться на 3.

Задача 4. Доказать, что сумма квадратов пяти последовательных целых чисел не является полным квадратом.

В этой задаче необходимо правильно перевести на математический язык ее условие и тогда у ребят не возникает трудностей с ее решением.

Решение. Действительно,

$$(n-2)^2+(n-1)^2+n^2+(n+1)^2 + (n+2)^2 = 5n^2+10 = 5(n^2+2).$$

Итак, сумма делится на 5, поэтому, если бы она была квадратом, то делилась бы на 25, т. е. $(n+2)^2$ делилась бы на 5, что невозможно, ибо квадрат числа при делении на 5 имеет остаток 0, 1, 4, откуда остаток n^2+2 равен 2, 3 или 1, т. е. n^2+2 не делится на 5. Следовательно, сумма квадратов пяти последовательных целых чисел не есть квадрат.

2. Задачи на нахождение наибольшего общего делителя и наибольшего общего кратного:

«НОД» и «НОК» являются важнейшими вспомогательными темами для изучения приведения дробей к общему знаменателю. Хорошим правилом является нарастание задач от конкретных числовых примеров до тех, с которыми мы можем столкнуться в реальной жизни (задача про замену деревянных столбов линии электропередачи на железобетонные с 40-метровой дистанции на 60-метровую при условии совпадения 1-го столба).

Задача 5. Наибольший общий делитель (НОД) натуральных чисел mиn равен 1. Какое наибольшее возможное значение НОД чисел $m+2000n$ и$n+2000m$?

Решение. Пусть $a=2000m+n,\ b=2000n+m,\ d-$ наибольший общий делитель a и b. Тогда d делит также числа$2000a-b=(2000^2-1)m$и$2000b-a=(2000^2-1)n$.

Поскольку mиn взаимно просты, то d делит 2000^2-1. С другой стороны, при $m=2000^2-2000-1,\ n=1,$ получаем $a=(2000^2-1)(2000-1),\ b=2000^2-1=d$.

Библиографический список

1. Аракелов А. В. Олимпиадные задачи по физике и математике в развитии одаренности обучающихся // В сборнике: Педагогическая деятельность как творческий процесс Материалы Всероссийской научно-практической конференции с международным участием. – 2018. – С. 14.

2. Горбачев Н. В. Сборник олимпиадных задач по математике. – М.: МЦНМО, 2004. – 560 с.

3. Русанов В. Н. Математические олимпиады младших школьников: Кн. для учителя: Из опыта работы (в сел. р-нах). – М.: Просвещение, 1990. – С. 4

4. Математическая олимпиада // Википедия. – [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://ru.wikipedia.org/wiki/Математическая_олимпиада#:~:text=Математическая%20олимпиада%20-%20это%20предметная,решению%20задач%20и%20самостоятельности%20мышления.

NUMBER THEORY IN OLYMPIAD PROBLEMS

S.Yu. Semenova, *Student*
D.R. Rayanova, *Student*
M.Yu. Soloshchenko, *Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor*
Sterlitamak Branch of Ufa University of Science and Technology
(Russia, Sterlitamak)

Abstract. *The article is devoted to the consideration of the elements of number theory in Olympiad problems in mathematics. On the basis of the above example of the extracurricular event "math battle" in preparation for the Olympiad, it was concluded that such extracurricular activities have a positive effect on the interest of students in the subject.*

Keywords: *number theory, mathematical Olympiad, teaching methods, mathematics, Olympiad problem.*