ПРАКТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ В СРЕДЕ WOLFRAM MATHEMATICA

Г.С. Осипов, *д-р техн. наук*
Н.С. Вашакидзе, *старший преподаватель*
Г.В. Филиппова, *старший преподаватель*
Н.Л. Рауш, *старший преподаватель*
Сахалинский государственный университет
(Россия, г. Южно-Сахалинск)

DOI:10.24412/2500-1000-2022-7-2-121-131

Аннотация. *Изложены базовые основы квази-параметрического анализа функций нескольких переменных, осуществлена практическая реализация нахождения допустимых значений аргументов функции, обеспечивающих выполнение основного правила в виде неравенства. Представлена методология и приведены основные операторы классического анализа функций нескольких переменных. Классический вариант анализа функций дополнен исследованием градиента и частных эластичностей. Приведена графическая интерпретация результатов анализа в среде Wolfram Mathematica.*
Ключевые слова: *компьютерное моделирование, анализ функций нескольких переменных.*

Постановка задачи

Исследуем функцию, например, трех переменных.

$$f = f(x, y, z) \\ (x, y, z \in \mathrm{R}^{+}) . \quad (1)$$

Целью исследование является определение множества аргументов функции, при которых она принимает значения больше или равные некоторой константы *M*, т.е.:

$$f = f(x, y, z) \geq M . \quad (2)$$

Материал и методы исследования

Применялись методы классического анализа функций нескольких переменных [1], включая расчет компонент градиента и частных эластичностей по аргументам. В качестве инструментального средства анализа выбран пакет Wolfram Mathematica [2], являющийся универсальной аналитической платформой символьной алгебры и компьютерного моделирования.

Основные результаты и их обсуждение

Пусть для конкретности уравнение (1) имеет вид (в котором есть и линейная и нелинейные составляющие):

$$f = f(x, y, z) = x(y - z) + 5y \\ (x, y, z \in \mathrm{R}^{+}) .$$

Область допустимых значений аргументов задана следующим образом:

$$x \in [20,75], y \in [10,20], z \in [1,10].$$

Задание функции f нескольких переменных $\xi = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ с областью определения σ, нахождение её максимального и минимального значений в среде Wolfram Mathematica можно осуществить, например, как показано на рисунке 1.

```
f = x (y - z) + 5 y;

σ = {20 <= x <= 75, 10 <= y <= 20, 1 <= z <= 10};

ξ = {x, y, z};

Maximize[f, σ, ξ]
максимизировать

{1525, {x → 75, y → 20, z → 1}}

Minimize[f, σ, ξ]
минимизировать

{50, {x → 20, y → 10, z → 10}}
```

Рис. 1. Пример определения функции

Операторы расчета градиента функции:

$\mathrm{Grad}[f, \{x, y, z\}]$ или $\nabla_{\{x.y.z\}}(f)$.

Очевидно, для рассматриваемой функции

$$\nabla_{\{x.y.z\}}(f) = \begin{pmatrix} y-z \\ x+5 \\ -x \end{pmatrix}.$$

Таким образом, увеличение аргумента x приводит к возрастанию функции (1) при условии, что $y>z$ и т.д.

Эластичности по аргументам.

$$E_x(f) = 0 \le \frac{x(y-z)}{5y + x(y-z)} \le \frac{57}{61}$$

Например, при $y=z$ эластичность нулевая (при любых допустимых значениях аргументов), а в точке $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ $E_x(f) = \frac{2}{3}$, т.е. возрастание аргумента x на 1% приведет к возрастанию функции (примерно) на 2/3%.

Соответственно:

$$E_y(f) = \frac{25}{24} \le \frac{y(x+5)}{5y + x(y-z)} \le 16,\ E_z(f) = -15 \le \frac{-xz}{5y + x(y-z)} \le -\frac{1}{24}.$$

Положим, например, константу M=400, тогда основные операторы обеспечения условий правила (2) могут быть реализованы как показано на рисунке 2.

```
M = 400;

rule = f ≥ M;

r = Reduce[{rule, 20 ≤ x ≤ 75, 10 ≤ y ≤ 20, 1 ≤ z ≤ 10}, ξ]
   привести
```

Рис. 2. Реализация решения неравенства вида $f \geq M$

В данном случае (при M=400) решение (2) имеет вид:

$$\left[\begin{array}{ll}
20 \le x \le 30 & \left[\begin{array}{l}
\begin{cases} y=\dfrac{x+400}{x+5} \\ z=1 \end{cases} \\
\begin{cases} \dfrac{x+400}{x+5} < y \le 20 \\ 1 \le z \le \dfrac{xy+5y-400}{x} \end{cases}
\end{array}\right. \\
30 < x < \dfrac{350}{9} & \left[\begin{array}{l}
\begin{cases} y=\dfrac{x+400}{x+5} \\ z=1 \end{cases} \\
\begin{cases} \dfrac{x+400}{x+5} < y \le \dfrac{10x+400}{x+5} \\ 1 \le z \le \dfrac{xy+5y-400}{x} \end{cases} \\
\begin{cases} \dfrac{10x+400}{x+5} < y \le 20 \\ 1 \le z \le 10 \end{cases}
\end{array}\right. \\
x=\dfrac{350}{9} & \left[\begin{array}{l}
\begin{cases} y=10 \\ z=1 \end{cases} \\
\begin{cases} 10 < y < \dfrac{1420}{79} \\ 1 \le z \le \dfrac{395y-3600}{350} \end{cases} \\
\begin{cases} \dfrac{1420}{79} \le y \le 20 \\ 1 \le z \le 10 \end{cases}
\end{array}\right. \\
\dfrac{350}{9} < x \le 75 & \left[\begin{array}{l}
\begin{cases} 10 \le y < \dfrac{10x+400}{x+5} \\ 1 \le z \le \dfrac{xy+5y-400}{x} \end{cases} \\
\begin{cases} \dfrac{10x+400}{x+5} \le y \le 20 \\ 1 \le z \le 10 \end{cases}
\end{array}\right.
\end{array}\right.$$

Для получения графической интерпретации результатов исследования рассмотрим несколько частных случаев уравнения (1).

1. Зафиксируем, например, x=x_0=50, тогда получим функцию двух переменных

$$f = f\left(x_0 = 50, y, z\right) = 5y + 50\left(y - z\right)$$

$$\left(y \in [10, 20], z \in [1, 10]\right).$$

Очевидно, если y=z=10, то функция принимает минимальное значение равное 50, а максимальное значение будет достигнуто в точке $\begin{pmatrix} 50 \\ 20 \\ 1 \end{pmatrix}$, т.е. $50 \le f \le 1050$.

При $M \le 50$ условие (2) будет выполняться при любых допустимых значениях аргументов y и z. При M=600 и y=20 неравенство (2) справедливо при любых допустимых значениях z. Далее, при M>50, если $y \ge \dfrac{M + 500}{55}$, то $z \in [1, 10]$.

Рассуждая аналогично, можно определить промежутки значений аргументов, при которых выполняется правило (2) для возможного диапазона изменения величины пороговой величины M (см. таблицу)

Таблица. Решение неравенства $f \ge M$

M	y	Z
$[1, 50]$	$[10, 20]$	$[1, 10]$
$(50, 500)$	$\left[10, \dfrac{M+500}{55}\right)$	$\left[1, \dfrac{55y - M}{50}\right]$
	$\left[\dfrac{M+500}{55}, 20\right]$	$[1, 10]$
$[500, 600)$	$\dfrac{M+50}{55}$	1
	$\left(\dfrac{M+50}{55}, \dfrac{M+500}{55}\right)$	$\left[1, \dfrac{55y - M}{50}\right]$
	$\left[\dfrac{M+500}{55}, 20\right]$	$[1, 10]$
600	$\dfrac{130}{11}$	1
	$\left(\dfrac{130}{11}, 20\right)$	$\left[1, \dfrac{55y - 600}{50}\right]$
	20	$[1, 10]$
$(600, 1050]$	$\dfrac{M+50}{55}$	1
	$\left(\dfrac{M+50}{55}, 20\right]$	$\left[1, \dfrac{55y - M}{50}\right]$

Положив, как и ранее M=400, получим частное решение при фиксированном значении величины M.

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}10 \le y \le \dfrac{180}{11} \\ 1 \le z \le \dfrac{11y-80}{10}\end{cases} \\ \begin{cases}\dfrac{180}{11} < y \le 20 \\ 1 \le z \le 10\end{cases}\end{array}\right.$$

На рисунке 3 приведены операторы графической интерпретации полученного решения в среде Wolfram Mathematica.

```
Plot3D[{f, M}, {y, 10, 20}, {z, 1, 10}, PlotTheme → "Web", PlotRange → All,
⌊график функции 2-х переменных            ⌊тематический стиль г···  ⌊отображаем···  ⌊всё
 PlotStyle → Directive[RGBColor[1, 0.5, 0], Specularity[GrayLevel[1], 20]],
 ⌊стиль графика ⌊директива  ⌊цвет RGB           ⌊зеркальность  ⌊уровень серого
 PlotLabels → "f=f(50,y,z)", PlotLegends → "Expressions", PlotStyle → Thick,
 ⌊пометки на графике          ⌊легенды графика                ⌊стиль графика ⌊жирный
 AxesLabel → {y, z}, ColorFunction → Function[{x, y, z}, Hue[z]],
 ⌊обозначения на осях  ⌊функция оцвечив···  ⌊функция                ⌊тон
 AxesStyle → Black, Background → White]
 ⌊стиль осей    ⌊чёрный ⌊фон         ⌊белый
```

Рис. 3. Операторы построения графика

Пространство решений представлено на рисунке 4.

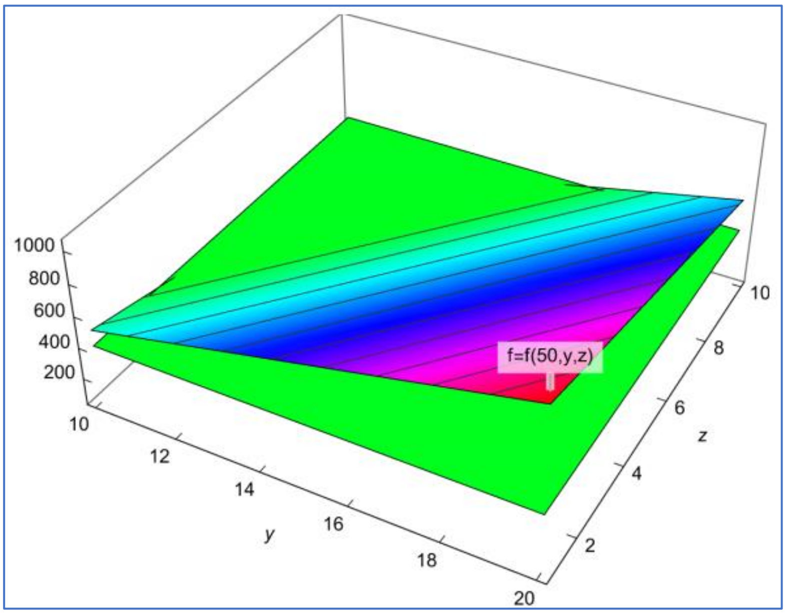

Рис. 4. Пространство решений

При $\dfrac{180}{11} < y \le 20$ решающее условие (2) выполняется при любых допустимых значениях переменной *z*. Иначе – при выполнении условия $1 \le z \le \dfrac{11y-80}{10}$. На рисунке 4 прямая $z = \dfrac{11y-80}{10}$ определяется пересечением плоскости $f = f(y,z) = 5y + 50(y-z)$ и плоскости *M*=400, обозначенной зеленым цветом.

Очевидно, частные эластичности при фиксированном значении аргумента *x* определятся следующим образом:

По переменной *y*:

$$E_y(f)=\frac{22}{21}\leq\frac{55y}{5y+50(y-z)}\leq 11$$

На рисунке 5 представлено пространство значений частной эластичности по переменной *y*.

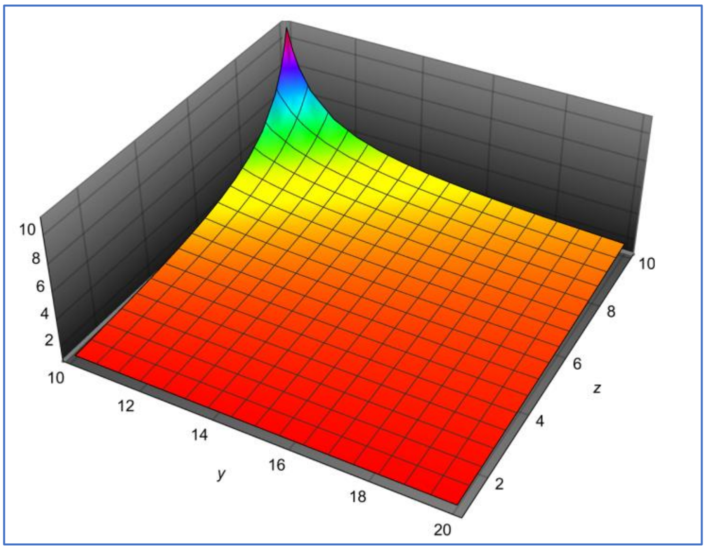

Рис. 5. Эластичность по *y*

В данном случае эластичность положительна, т.е. увеличение аргумента *y* на 1% приводит к возрастанию функции *f* на (примерно) $E_y(f)$%

По переменной *z*:

$$E_z(f)=-10\leq-\frac{50z}{5y+50(y-z)}\leq-\frac{1}{21}\,.$$

На рисунке 6 представлено пространство значений частной эластичности по переменной *z*.

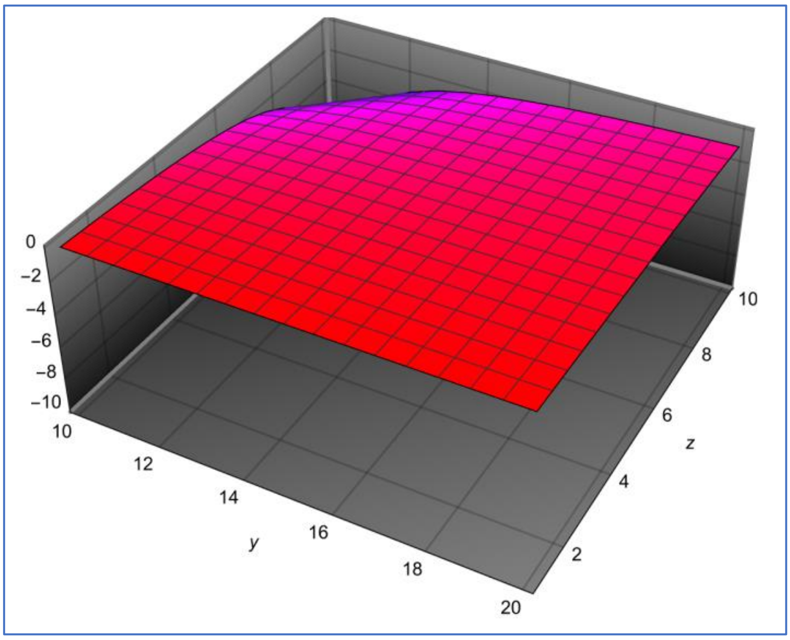

Рис. 6 Эластичность по *z*

Минимальное значение эластичности достигается при y=z=10, незначительное уменьшение z приводит к существенному возрастанию (в процентном выражении) функции f.

2. Пусть y_0=15, тогда:

$$f = f\left(x, y_0 = 15, z\right) = 75 + x(15 - z)$$

$$\left(x \in [20, 75], z \in [1, 10]\right)$$

Очевидно, $\left(x_0 = 20, z_0 = 10\right) 175 \le f\left(x, z\right) \le 1125 \left(x_0 = 75, z_0 = 1\right)$

В данном случае решение неравенства (2) имеет вид:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \dfrac{325}{14} \\ z = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} \dfrac{325}{14} < x \le 65 \\ 1 \le z \le \dfrac{15x - 325}{x} \end{cases} \\ \begin{cases} 65 < x \le 75 \\ 1 \le z \le 10 \end{cases} \end{array}\right.$$

На рисунке 7 приведено пространство решений с нанесенной граничной плоскостью M=400.

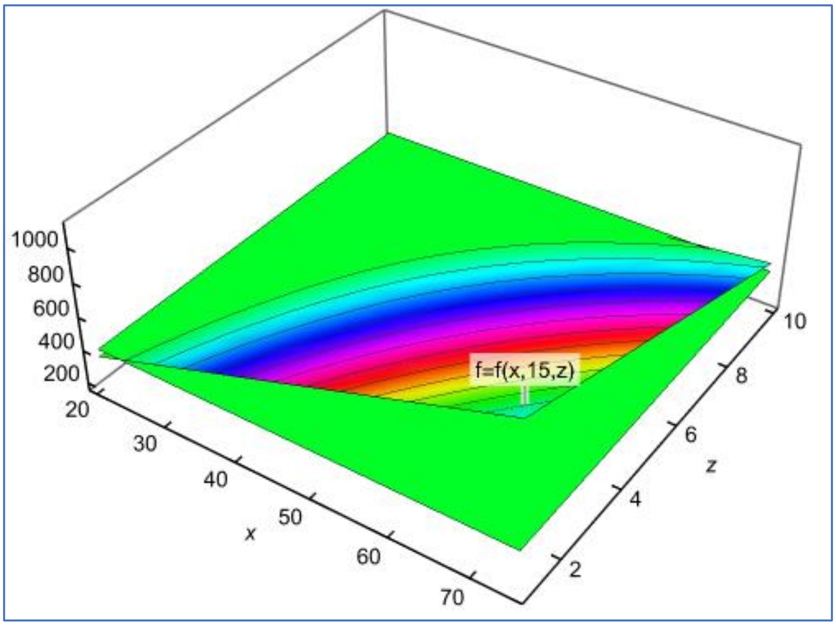

Рис. 7. Пространство решений

На графике, кроме того, нанесены изолинии, а уравнение граничной кривой в данном случае имеет вид:

$$z = 15 - \frac{325}{x}.$$

Частная эластичность функции по переменной x имеет вид (см. рисунок 8)

$$E_x\left(f\right) = \frac{4}{7} \le \frac{x\left(15 - z\right)}{75 + x\left(15 - z\right)} \le \frac{14}{15}$$

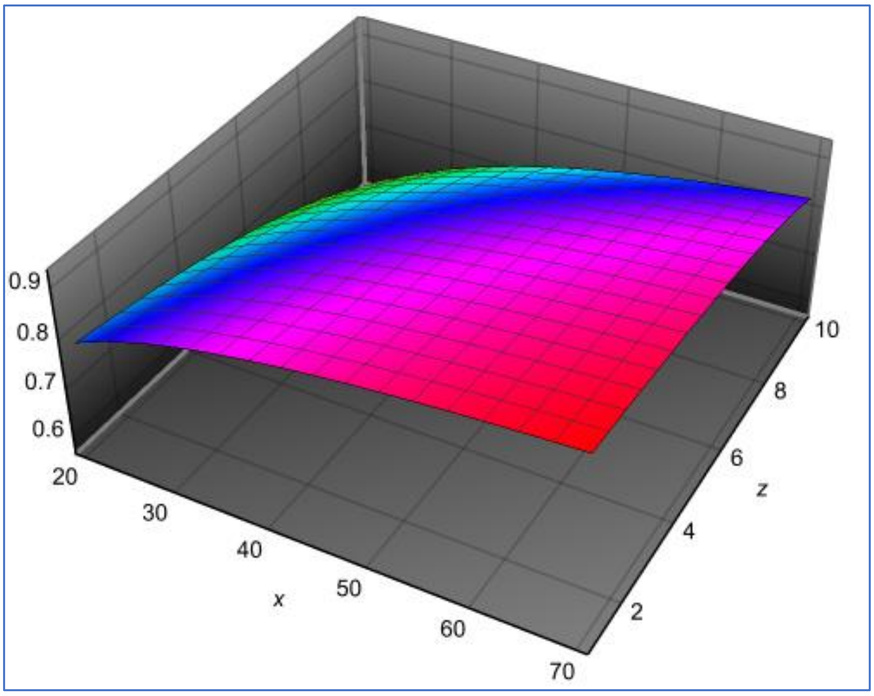

Рис. 8. Эластичность по *x*

Эластичность по *x* положительна – увеличение аргумента приводит к возрастанию функции.

Очевидно, частная эластичность по переменной *z* найдется так (см. рисунок 9).

$$E_z(f) = -\frac{5}{3} \le -\frac{xz}{75 + x(15 - z)} \le -\frac{4}{17}$$

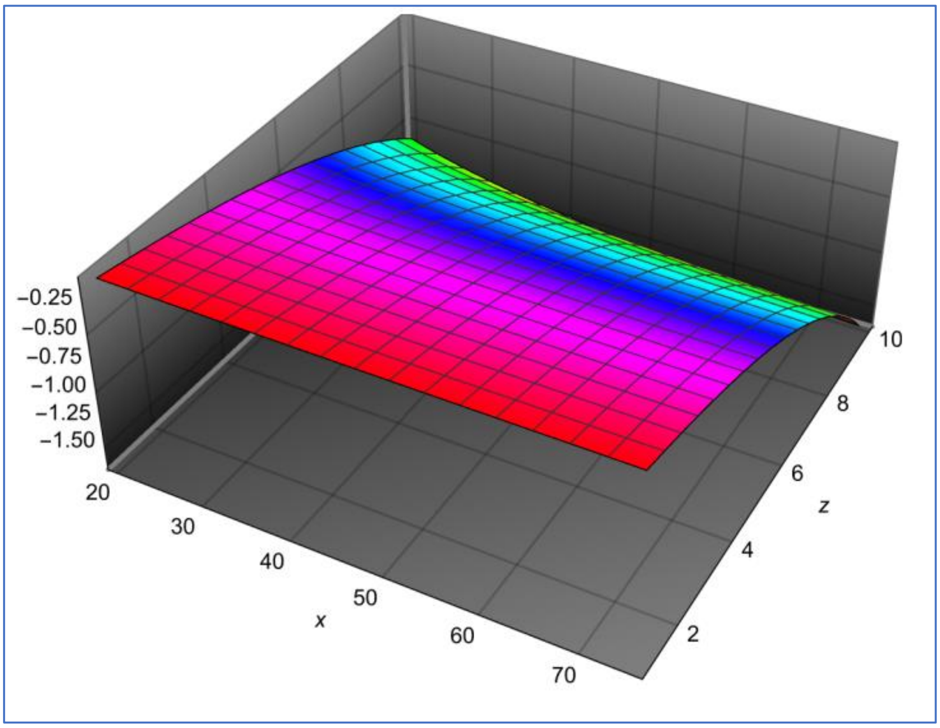

Рис. 9. Эластичность по *z*

Эластичность по *z* отрицательна – увеличение аргумента приводит к убыванию функции.

3. Пусть z_0=5, тогда:

$$f = f\left(x, y, z_0 = 5\right) = x\left(y-5\right)+5y$$

$$\left(x \in [20,75], y \in [10,20]\right)$$

В рассматриваемом варианте решение неравенства (2) имеет вид:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 20 \\ y = 20 \end{cases} \\ \begin{cases} 20 < x \le 70 \\ \dfrac{5x+400}{x+5} \le y \le 20 \end{cases} \\ \begin{cases} 70 < x \le 75 \\ 10 \le y \le 20 \end{cases} \end{array}\right.$$

На рисунке 10 приведено пространство решений с нанесенной граничной плоскостью.

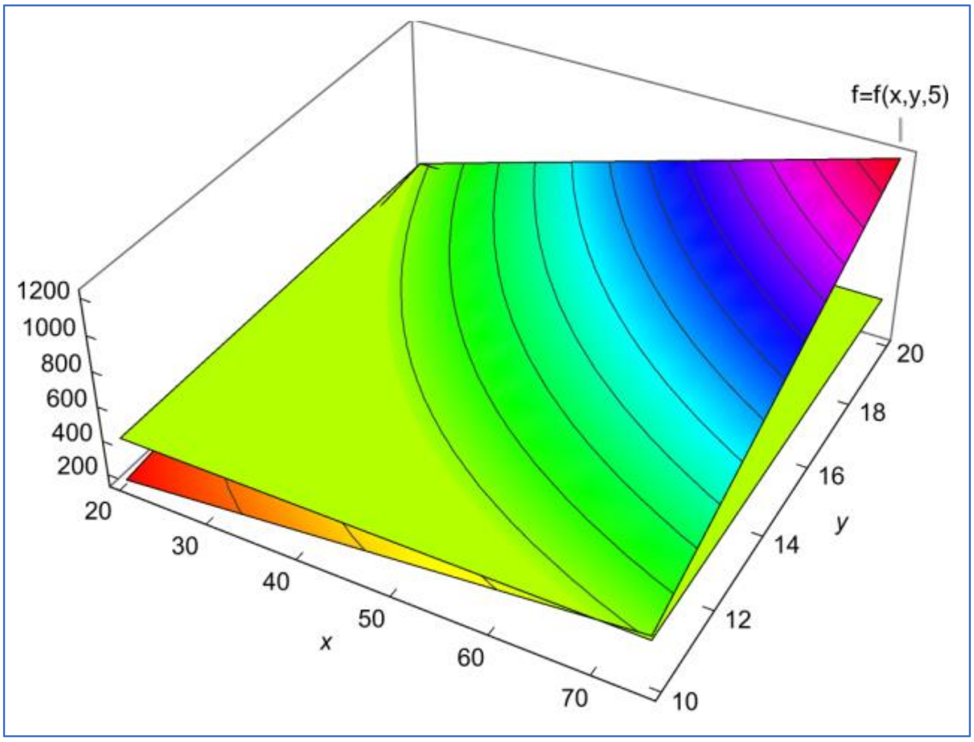

Рис. 10. Пространство решений

На графике, кроме того, нанесены изолинии, а уравнение граничной кривой имеет вид: $z = \dfrac{5x+400}{x+5}$.

Частная эластичность функции по переменной x имеет вид (см. рисунок 11).

$$E_x\left(f\right) = \frac{2}{3} \le \frac{x\left(y-5\right)}{x\left(y-5\right)+5y} \le \frac{45}{49}$$

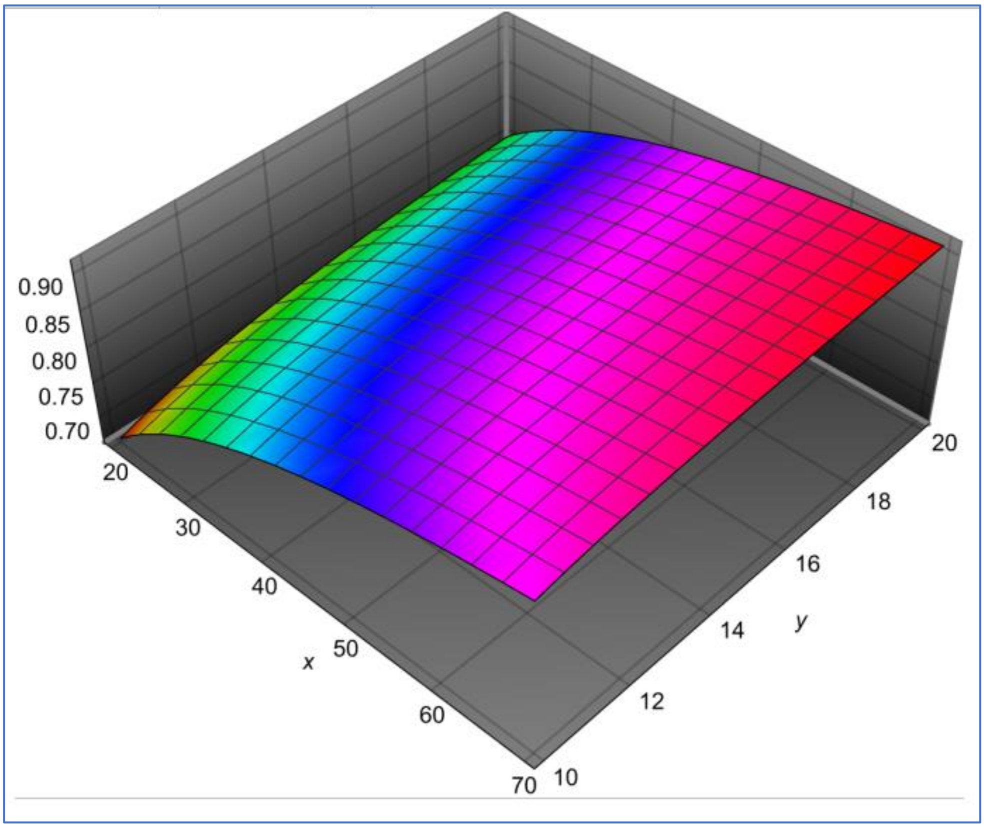

Рис. 11. Эластичность по *x*

Очевидно, частная эластичность по переменной *y* найдется так (см. рисунок 12).

$$E_y(f)=\frac{5}{4}\le\frac{y(x+5)}{x(y-5)+5y}\le\frac{32}{17}$$

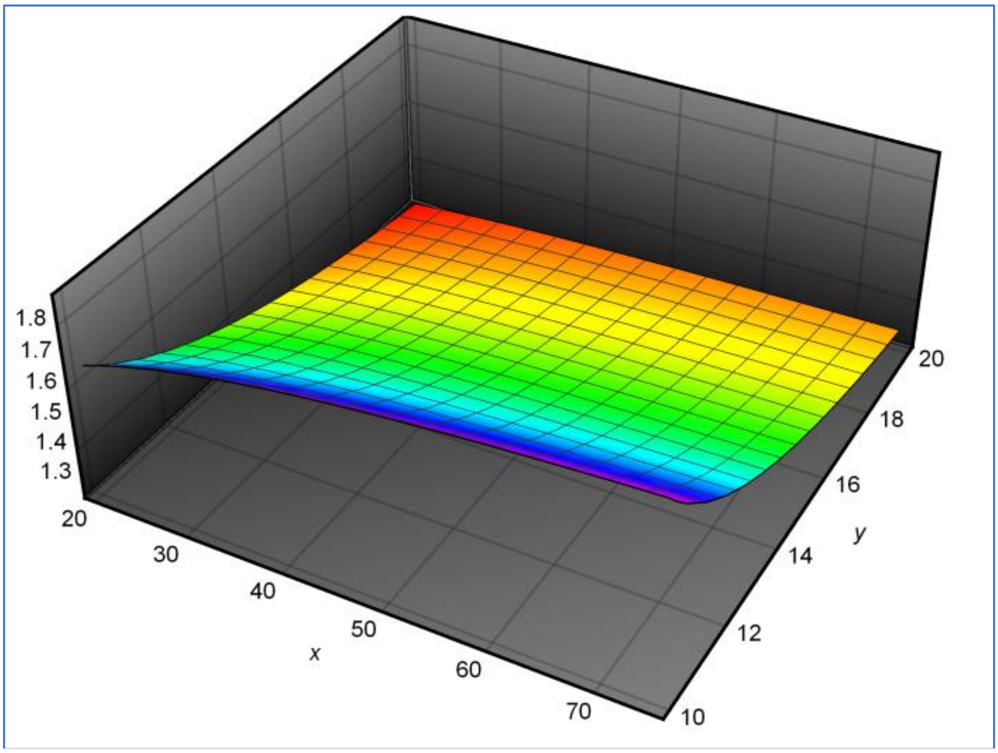

Рис. 12. Эластичность по *y*

Заключение. Осуществлена формальная постановка квази-параметрического анализа функций нескольких переменных. Предложена методология исследования функций в среде пакета символьного моделирования и компьютерной алгебры Wolfram Mathematica. Выполнена практическая реализация анализ функции трех переменных. Приведены примеры графической интерпретации решения задачи и частных эластичностей исследуемой функции.

Библиографический список

1. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа: В 2-х ч. Часть 1. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 648 с.
2. Stephen Wolfram. An Elementary Introduction to the Wolfram Language. – [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://www.wolfram.com/language/elementary-introduction/2nd-ed/ (Дата обращения 28.07.2022).

PRACTICAL ANALYSIS OF FUNCTIONS OF SEVERAL VARIABLES IN THE WOLFRAM MATHEMATICA ENVIRONMENT

G.S. Osipov, *Doctor of Technical Sciences*
N.S. Vashakidze, *Senior Lecturer*
G.V. Filippova, *Senior Lecturer*
N.L. Rausch, *Senior Lecturer*
Sakhalin State University
(Russia, Yuzhno-Sakhalinsk)

Abstract. *The basic principles of quasi-parametric analysis of functions of several variables are described, the practical implementation of finding acceptable values of function arguments ensuring the fulfillment of the basic rule in the form of inequality is carried out. The methodology is presented and the main operators of the classical analysis of functions of several variables are given. The classical version of the function analysis is supplemented by the study of the gradient and partial elasticities. A graphical interpretation of the analysis results in the Wolfram Mathematica environment is given.*

Keywords: *computer modeling, analysis of functions of several variables.*