

РАСПРОСТРАНЕНИЕ УПРУГИХ ВОЛН В ТРЕХМЕРНОМ СЛОЕ В ЗАВИСИМОСТИ ОТ МОДЕЛЕЙ ПЛАСТИНЫ

А.И. Болгова, канд. физ.-мат. наук, доцент

Южно-Российский государственный политехнический университет (НПИ) имени М.И. Платова
(Россия, г. Новочеркасск)

DOI:10.24412/2500-1000-2022-6-3-90-94

Аннотация. В работе рассмотрены три модели пластин, лежащие без трения и отрыва на упругом трехмерном слое: с учетом сдвига, с учетом момента инерции и с учетом этих двух факторов. На поверхности пластины осциллирует нагрузка, заданная в произвольной области. Конкретные расчеты, проведенные для различных областей показали, что все модели пластин дают одинаковые первые дисперсионные кривые.

Ключевые слова: трехмерный слой, пластина, дисперсионные кривые, сдвиг, момент инерции.

1. Введение. В работах [1-3] для акустического и изотропного слоев изложен метод решения задачи для определения асимптотических полей в случае действия на поверхности трехмерного слоя осциллирующей нагрузки, расположенной в произвольной области. Главные члены асимптотики были получены в случае действия нагрузки в прямоугольнике и по линии [4, 5]. В данной работе исследуются три известные модели для поперечных колебаний пластины [6], лежащей без отрыва и трения на трехмерном изотропном слое.

На поверхности пластины осциллирует нагрузка, заданная в произвольной области. Изучается влияние на асимптотическое распространение волн в слое различных моделей пластины: с учетом сдвига (пластина ПС), с учетом момента инерции (пластина ПИ) и с учетом этих двух факторов (пластина ПСИ).

2. Постановка задачи. Уточненное уравнение поперечных колебаний пластины ПСИ, учитывающее влияние инерции вращения и деформации поперечного сдвига имеет вид [6]:

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\tilde{D}}{\rho_2 h} \nabla^2 \nabla^2 - \left(\frac{\tilde{D}}{k^2 \mu_2 h} + \frac{\tilde{I}}{h} \right) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla^2 + \frac{\rho \tilde{I}}{k^2 \mu_2 h} \frac{\partial^4}{\partial t^4} \right\} \tilde{v} = \quad (1)$$

$$= \left\{ \frac{1}{\rho_2 h} + \frac{\tilde{I}}{k^2 \mu_2 h^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\tilde{D}}{k^2 \mu_2 \rho_2 h^2} \nabla^2 \right\} (p(x, y, t) - q(x, y, t))$$

Из уравнения (1) вытекают как частные случаи уравнение колебаний пластины ПС

$$\left\{ \tilde{D} \nabla^2 \nabla^2 - \frac{\rho_2 \tilde{D}}{k^2 \mu_2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla^2 + \rho_2 h \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right\} \tilde{v} = \left\{ 1 - \frac{\tilde{D}}{k^2 \mu_2 h} \nabla^2 \right\} (p(x, y, t) - q(x, y, t))$$

и уравнение для пластины ПИ

$$\left\{ \tilde{D} \nabla^2 \nabla^2 - \rho_2 \tilde{I} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla^2 + \rho_2 h \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right\} \tilde{v} = p(x, y, t) - q(x, y, t) .$$

Уравнения колебаний слоя имеют вид:

$$(\lambda_1 + \mu_1) (\operatorname{div} \underline{u})_{,k} + \mu_1 \Delta u_k = \rho_1 \ddot{u}_k, \quad k = 1, 2, 3,$$

где $\lambda_1, \mu_1, \rho_1, H, \lambda_2, \mu_2, \rho_2, h, \nu_2$ - постоянные, соответственно характеризующие слой и пластину, Δ - оператор Лапласа в трехмерной области, Δ^2 - квадрат оператора Лапласа в двумерной области x, y , $\tilde{D} = (\mu_2 h^3) / (6(1 - \nu_2))$, $\nabla^2 \nabla^2 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2}$, $\tilde{I} = \frac{h^3}{12}$.

Граничные условия и условия сопряжения пластины и слоя имеют вид

$$p(\tilde{x}, \tilde{y}, t) = \begin{cases} f(\tilde{x}, \tilde{y}) e^{i\tilde{\Omega}t}, (\tilde{x}, \tilde{y}) \in S, \\ 0, (\tilde{x}, \tilde{y}) \notin S, \end{cases} \quad (2)$$

$$q(\tilde{x}, \tilde{y}, t) = \sigma_{33}(\tilde{x}, \tilde{y}, H, t), \quad \tilde{v}(\tilde{x}, \tilde{y}, t) = u_3(\tilde{x}, \tilde{y}, H, t), \quad \sigma_{k3}(\tilde{x}, \tilde{y}, H, t) = 0, \quad k = 1, 2$$

$$\sigma_{k3}(\tilde{x}, \tilde{y}, 0, t) = 0, \quad k = 1, 2, \quad u_3(\tilde{x}, \tilde{y}, 0, t) = 0, \quad (3)$$

где S – некоторая ограниченная область с кусочно-гладкой границей.

Далее рассматривается установившийся режим колебаний, т.е. решение системы ищем в виде

$$\underline{u}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, t) = \tilde{U}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) e^{i\tilde{\Omega}t}, \quad \tilde{v}_3(\tilde{x}, \tilde{y}, t) = \tilde{V}(\tilde{x}, \tilde{y}) e^{i\tilde{\Omega}t}, \quad \sigma_{kl} = \tilde{\sigma}_{kl} e^{i\tilde{\Omega}t}$$

и вводятся безразмерные величины

$$x = \frac{\tilde{x}}{H}, \quad y = \frac{\tilde{y}}{H}, \quad z = \frac{\tilde{z}}{H}, \quad \underline{U} = \frac{\tilde{U}}{H}, \quad V = \frac{\tilde{V}}{H}, \quad \Omega = \frac{\tilde{\Omega}H}{c_1}, \quad \xi = \frac{h}{H},$$

$$D = \frac{\mu_2 h^3}{6H^3 \mu_1 (1 - \nu_2)}, \quad c = \frac{c_2}{c_1}, \quad c_1^2 = \frac{\lambda_1 + 2\mu_1}{\rho_1}, \quad c_2^2 = \frac{\mu_1}{\rho_1}, \quad \mu = \frac{\mu_2}{\mu_1}, \quad \rho = \frac{\rho_2}{\rho_1}.$$

При решении задачи будем применять принцип предельного поглощения, который фактически приводит к замене Ω на $\Omega_\varepsilon = \Omega - i\varepsilon$, $0 < \varepsilon \ll 1$, и искать решение в классе функций, убывающих на бесконечности, т.е. $\underline{u}(x, y, z, t) \rightarrow 0$, если $r = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty$.

Применяя к системе дифференциальных уравнений и условиям (2), (3) преобразование Фурье по координатам x и y , и решая полученную систему уравнений с соответствующими граничными условиями, найдем:

$$U_{1m\varepsilon} = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} i\alpha Q_m(\alpha, \gamma) \tilde{A}(\ell, \Omega_\varepsilon, z) e^{-i\alpha x} e^{-i\gamma y} d\alpha d\gamma,$$

$$U_{2m\varepsilon} = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} i\gamma Q_m(\alpha, \gamma) \tilde{A}(\ell, \Omega_\varepsilon, z) e^{-i\alpha x} e^{-i\gamma y} d\alpha d\gamma,$$

$$U_{3m\varepsilon} = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \beta_{1\varepsilon} Q_m(\alpha, \gamma) \tilde{C}(\ell, \Omega_\varepsilon, z) e^{-i\alpha x} e^{-i\gamma y} d\alpha d\gamma,$$

$$\text{где } \tilde{A}(\ell, \Omega, z) = -E_1 sh\beta_2 ch\beta_1 z + 2\beta_1 \beta_2 sh\beta_1 ch\beta_2 z,$$

$$\tilde{C}(\ell, \Omega, z) = E_1 sh\beta_2 sh\beta_1 z - 2\ell^2 sh\beta_1 sh\beta_2 z$$

Окончательное решение рассматриваемой краевой задачи получим с помощью предельного перехода [7]: $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} U_\varepsilon = \underline{U}$.

Выражения для контактных напряжений, преобразованных по Фурье, $Q(\alpha, \gamma)$ для трех рассматриваемых моделей, выраженные через заданную нагрузку, также преобразованную по Фурье, имеют вид:

$$Q_m(\alpha, \gamma) = \Delta(\ell, \Omega) K_m(\ell, \Omega) F(\alpha, \gamma) / \Delta_m(\ell, \Omega), m=6,7,8,$$

$$\text{где } \ell^2 = \alpha^2 + \gamma^2,$$

$$\Delta_6(\ell, \Omega) = \Delta(\ell, \Omega) \left(\frac{1}{\rho\xi} - \frac{I\Omega^2}{k^2\mu\xi^2c^2} + \frac{D\ell^2}{k^2\mu\rho\xi^2} \right) + \quad (4)$$

$$+ \beta_1 sh\beta_1 sh\beta_2 (E_1 - 2\ell^2) \left(\frac{Dc^2\ell^4}{\rho\xi} - \Omega^2 + \frac{I\rho\Omega^4}{k^2\mu\xi^2c^2} - \left(\frac{D}{k^2\mu\xi} + \frac{I}{\xi} \right) \ell^2 \Omega^2 \right),$$

$$\Delta_7(\ell, \Omega) = \Delta(\ell, \Omega) \left(1 - \frac{D\ell^2}{k^2\mu\xi} \right) + \beta_1 sh\beta_1 sh\beta_2 (E_1 - 2\ell^2) \left(D\ell^4 + \frac{\rho\Omega^2}{c^2} \left(\frac{D\ell^2}{k^2\mu} - \xi \right) \right), \quad (5)$$

$$\Delta_8(\ell, \Omega) = \Delta(\ell, \Omega) + \beta_1 sh\beta_1 sh\beta_2 (E_1 - 2\ell^2) \left(D\ell^4 - \frac{\rho\Omega^2}{c^2} (I\ell^2 + \xi) \right), \quad (6)$$

$$\Delta(\ell, \Omega) = E_1^2 ch\beta_1 sh\beta_2 - 4\ell^2 \beta_1 \beta_2 sh\beta_1 ch\beta_2,$$

$$K_6(\ell, \Omega) = \frac{1}{\rho\xi} - \frac{I\Omega^2}{k^2\mu\xi^2c^2}, K_7(\ell, \Omega) = 1 - \frac{D\ell^2}{k^2\mu\xi}, K_8(\ell, \Omega) = 1$$

3. Численное исследование дисперсионных уравнений. В работе [8] на основе численного анализа показано, что более существенное влияние на распространение потока энергии в слое, укрепленном пластиной без учета сдвига и инерции, оказывает увеличение плотности пластины по сравнению со слоем, чем изменение отношения их жесткостей. В данной работе численные исследования уравнений (4)-(6) показали, что дисперсионные кривые для слоя, укрепленного пластиной, тем сильнее отличаются от дисперсионных кривых для одного изотропного слоя, чем более плотным является материал пластины по сравнению с материалом слоя, и чем больше толщина пластины. При исследовании трех различных моделей пластин выявлено, что все модели пластин дают

одинаковый результат до $\Omega = \Omega_0$ для первой дисперсионной кривой, свыше Ω_0 дисперсионные кривые расходятся, что видно из рисунка. В качестве материала слоя выбран плавленый кварц, а материал пластины - вольфрам: $\mu = 2,609$, $\rho = 3,858$, $\xi = 0,1$. В этом случае $\Omega_0 \approx 0,8$. Если перейти к размерным переменным, получим, например, что при толщине слоя $H = 100\text{м}$ частота колебаний $\tilde{\Omega}_0 \approx 0,042$ Гц, а если $H = 10\text{м}$, то $\tilde{\Omega}_0 \approx 0,0042$ Гц. На рисунке приведены графики дисперсионных кривых для изотропного слоя (сплошные линии), для изотропного слоя, подкрепленного пластиной ПИ (мелкий пунктир) и пластиной ПСИ (крупный пунктир), коэффициент $k = \sqrt{5/6} = 0.913$.

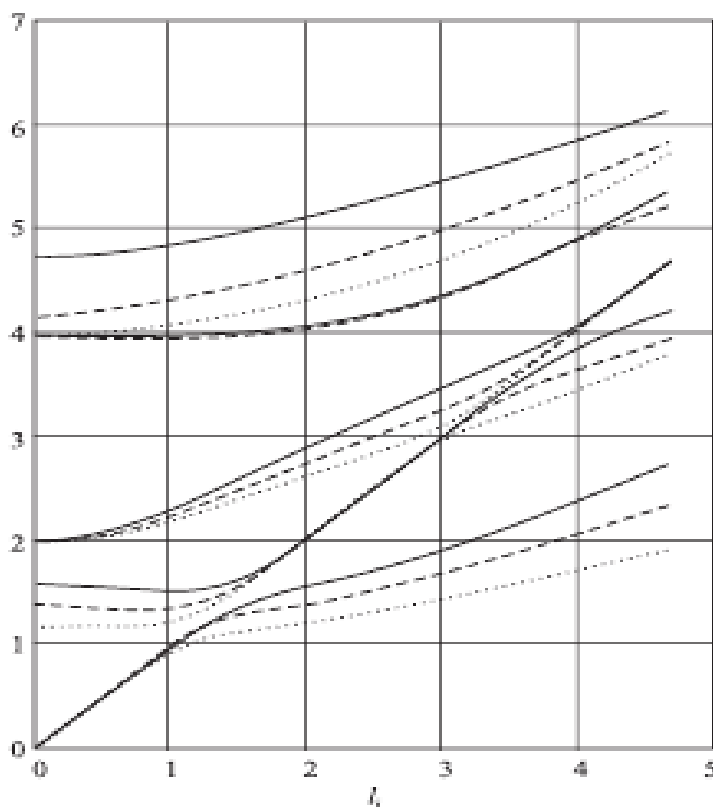


Рис. 1.

Дисперсионные кривые, когда рассматриваем модель пластины ПС, при таких же значениях параметров примерно совпадают с дисперсионными кривыми для пластины ПИ.

4. **Заключение.** В работе рассмотрены три модели пластин, лежащих без трения и отрыва на упругом трехмерном слое, и выяснено влияние различных моделей на асимптотическое распространение волн в слое при действии нагрузки в произвольной области S .

Конкретные расчеты, проведенные для различных областей показали, что все модели пластин дают одинаковые первые дисперсионные кривые до $\Omega = \Omega_0$, свыше Ω_0 дисперсионные кривые расходятся.

Сравнение результатов, полученных для слоя и слоя с различными моделями пластин, показало, что наиболее близкой к одному слою является модель для слоя с пластиной ПСИ, следовательно при расчетах нужно использовать модель слоя с пластиной ПСИ.

Библиографический список

1. Болгова А.И. Распространение волн в трехмерном изотропном слое / Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. – 2001. – Спецвып.: Математическое моделирование. – С. 36-37.
2. Белоконь А.В., Болгова А.И. Особенности распространения волн в изотропном трехмерном слое с тонкой накладкой // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. – 2005. – №2. – С. 31-35.
3. Белоконь А.В., Белоконь О.А., Болгова А.И. Влияние неравномерной нагрузки на характер распространения волн в изотропном трехмерном слое с тонкой накладкой: Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. – 2006. – №4. – С. 3-8.
4. Белоконь О.А., Болгова А.И. Исследование волновых и энергетических характеристик в слое от действия неравномерной нагрузки: Численно-аналитические методы: Сб. науч. тр. / Юж.-Рос. гос. техн. ун-т, – Новочеркасск: ЮРГТУ, 2007. – С. 65-71.

5. Белоконь А.В., Белоконь О.А., Болгова А.И. Волны в трехмерном слое, подкрепленном тонкой пластиной // Вестник Самарского гос. ун-та – Естественнонаучная серия. – 2007. – №6 (56). – С. 30-45

6. Григолюк Э.И., Селезов И.Т. Механика твердых деформируемых тел, т. 5. Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек. – М.: ВИНТИ, 1973. – 267 с.

7. Свешников А.Г. Принцип предельного поглощения для волновода // Докл. АН СССР. – 1951. – Т. 80. №3. – С. 1011-1013.

8. Болгова А.И. Анализ энергетических характеристик в трехмерном изотропном слое, укрепленном пластиной // Математическое моделирование процессов и систем: Материалы IX Межд. молодежн. науч.-практ. конф. / отв. ред. С.А. Мустафина. – Стерлитамак: Стерлитамакский филиал БашГУ, 2019. – С. 91-95.

ELASTIC WAVES PROPAGATION IN A THREE-DIMENSIONAL LAYER DEPENDING ON THE PLATE MODELS

A.I. Bolgova, *Candidate of Physical and Mathematical Sciences*

Platov South-Russian State Polytechnic University (NPI)

(Russia, Novocherkassk)

Abstract. *Three models of plates lying without friction and separation on an elastic three-dimensional layer are considered in this paper: taking into account the shear, the moment of inertia and both factors. A load set in an arbitrary region oscillates on the surface of the plate. Specific calculations carried out for different areas have shown that all plate models give the same first dispersion curves.*

Keywords: *three-dimensional layer, plate, dispersion curves, the shear, the moment of inertia.*