ОПТИМИЗАЦИЯ МАКСИМАЛЬНОГО ПОТОКА МЕТОДОМ АНАЛИЗА СЕТИ

Ю.Е. Гагарин, *канд. техн. наук*
У.В. Никитенко, *старший преподаватель*
П.Е. Белоножко, *бакалавр*
Калужский филиал МГТУ им. Н.Э. Баумана
(Россия, г. Калуга)

DOI:10.24412/2500-1000-2022-3-2-134-136

Аннотация. *В статье рассмотрен метод анализа сети для оптимизации максимального потока. С помощью сжатия нескольких узлов в один узел, данный метод позволяет построить эквивалентную сеть, которая представляет собой дерево. Такой подход дает возможность уменьшить число вычислений максимальных потоков между каждой парой узлов, причем каждый раз задача решается в более простой сети.*

Ключевые слова: *оптимизация, максимальный поток, анализ сети, минимальный разрез.*

В теории оптимизации и теории графов, задача о максимальном потоке является одной из самых важных. Она является частным случаем более трудных задач, как например задача о циркуляции. Благодаря алгоритмам, решающих данную задачу, обеспечивается работа всех современных программ, связанных с сетевыми структурами [1, 2]. Решение подобных задач может потребовать огромных ресурсов и времени, поэтому особенно актуально рассмотреть методы, которые позволят оптимизировать базовые алгоритмы по решению данной задачи.

В теории оптимизации и теории графов, задача о максимальном потоке является одной из самых важных. Она является частным случаем более трудных задач, как например задача о циркуляции. Благодаря алгоритмам, решающих данную задачу, обеспечивается работа всех современных программ, связанных с сетевыми структурами. Решение подобных задач может потребовать огромных ресурсов и времени, поэтому особенно актуально рассмотреть методы, которые позволят оптимизировать базовые алгоритмы по решению данной задачи.

Задачи о потоках в сетях можно сформулировать как задачи линейного программирования. Потоковые задачи обладают определенной структурой и для них разработано большое число эффективных алгоритмов и методов [3, 4]. В отличие от задач линейного программирования, решениями большинства таких задач являются целочисленные значения.

При этом, для того, чтобы оценить качество полученного решения и сделать выводы о том, достаточно ли исходной информации для получения надежного решения, удовлетворяет ли поставленным требованиям алгоритм решения, необходимо определять интервальные оценки решения [3]. При определении интервальных оценок решения необходимо учитывать неопределенности исходных данных, что значительно повышает достоверность принимаемых решений [4, 5].

Существуют различные методы решения потоковых задач – это алгоритм Форда-Фалкерсона, Эдмондса-Карпа, Диница и др. Основные методы, используемые в алгоритмах решения задач о максимальном потоке, можно применять для решения других задач линейного программирования, например, связанных с транспортными сетями. Одной из таких задач является задача нахождения многополюсных максимальных потоков, в которой требуется найти максимальный поток между каждой парой вершин, и для решения данной задачи все вышеперечисленные алгоритмы будут неэффективны. Поэтому существует методы по оптимизации сети: метод анализа сети и синтеза сети.

Основным подходом в таких методах является процесс сжатия нескольких узлов в один узел. При этом дуги между всеми «сжимаемыми» узлами получают бесконечную пропускную способность. Некоторый узел, не принадлежащий числу сжимаемых, и связанный со всеми сжимаемыми узлами, заменяются одной дугой с пропускной способностью, равной сумме пропускных способностей заменяемых связывающих дуг. Таким образом, если в сети имеется p узлов, то для определения величины максимальных потоков не нужно проводить вычисления $p(p-1)/2$ раз максимальных потоков между каждой парой узлов, а достаточно решить лишь решить $p-1$ задач о максимальном потоке, причем каждый раз задача решается в более простой сети, чем исходная.

Для произвольной сети N, состоящей из n узлов определяются величины максимальных потоков между заданными p узлами сети N. Эти p узлов, между которыми ищется максимальный поток, называются полюсами, а остальные $n-p$ узлов обычными или промежуточными узлами. Можно допустить, что имеется некоторая другая сеть N', которая состоит из p узлов, причем величины максимальных потоков между p полюсами сети N равны величинам максимальных потоков между p узлами сети N'. Две сети, имеющие равные величины максимальных потоков между некоторым множеством узлов, называются потоко-эквивалентными или просто эквивалентными относительно этого множества узлов. Тогда можно найти искомые величины максимальных потоков между p узлами, рассматривая сеть N'. Оказывается, что для каждой сети N всегда существует эквивалентная ей сеть N', являющаяся деревом.

Рассмотрим алгоритм, который позволяет по сети N построить эквивалентное ей дерево N'. Процесс нахождения максимальных потоков между p полюсами сети состоит из двух этапов. Действия этапов повторяются до тех пор, пока не будет построено дерево N', эквивалентное исходной сети N.

Этап 1: между двумя выбранными полюсами решается задача о максимальном потоке. Эта задача решается в сети, меньшей, чем исходная сеть N, поскольку некоторое множество узлов сжато в один узел. При нахождении максимального потока выделяют минимальный разрез.

Этап 2: для выделенного минимального разреза определяется очередная дуга дерева. Выбирается некоторая новая пара полюсов и осуществляется сжатие некоторых подмножеств узлов исходной сети, в результате чего получается сеть и переходят в этапу 1. Алгоритм заканчивается, когда найдено $p-1$ дуг дерева.

Метод анализа сети позволяет строить эквивалентную сеть, которая является деревом. Можно построить много деревьев, которые являются потоко-эквивалентными заданной сети. При этом, иногда при построении потоко-эквивалентное дерево обладает особенностью: каждая ветвь этого дерева соответствует некоторому минимальному разрезу в исходной сети. Такое дерево называется деревом разрезов. Дерево разрезов, содержащее n узлов, изображает $n-1$ минимальных разрезов исходной сети, которые не пересекаются друг с другом.

Метод анализа сети может быть использован при оптимизации транспортной сети [6], в частности при создании интеллектуальной системы управления городскими транспортными потоками для анализа информации [7] и выбора оптимальных управленческих решений.

Библиографический список

1. Гагарин Ю.Е. Интервальное оценивание условных вероятностей в байесовских сетях доверия / Ю.Е. Гагарин, У.В. Никитенко, М.А. Степович // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики: сборник трудов Международной научной конференции. – Воронеж: Научно-исследовательские публикации, 2021. – С. 802-804.

2. Гагарин Ю.Е. Учет неопределенности информации при оценивании риска в байесовских сетях доверия / Ю.Е. Гагарин, У.В. Никитенко, М.А. Степович // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики: сборник трудов Международной научной конференции. – Воронеж: Научно-исследовательские публикации, 2020. – С. 732-735.
3. Гагарин Ю.Е. Прогнозирование показателей деятельности предприятий с учетом неопределенности исходных данных / Ю.Е. Гагарин, С.Н. Гагарина // Вестник университета. – 2019. – № 1. – С. 94-99. – DOI 10.26425/1816-4277-2019-1-94-99.
4. Гагарин Ю.Е. Интервальное оценивание объемов потребления ресурсов при стохастических исходных данных / Ю.Е. Гагарин, С.Н. Гагарина // Вестник университета. – 2018. – №12. – С. 64-70. – DOI 10.26425/1816-4277-2018-12-64-70.
5. Гагарина С.Н. Интервальное прогнозирование объемов спроса на услуги субъектов естественных монополий с учетом неопределенности информации / С.Н. Гагарина, Ю.Е. Гагарин // Вестник университета. – 2013. – №22. – С. 101-110.
6. Гагарина С.Н. Повышение эффективности городской транспортной инфраструктуры на основе цифровых технологий / С.Н. Гагарина, Н.Н. Чаусов, В.Н. Левкина // Вестник университета. – 2020. – №7. – С. 68-75. – DOI 10.26425/1816-4277-2020-7-68-75.
7. Ткаченко А.Л. Применение программных продуктов в сфере бизнес аналитики / А.Л. Ткаченко, В.И. Кузнецова, Г.В. Заплатин // Информационные технологии. Проблемы и решения. – 2021. – №3 (16). – С. 26-32.

OPTIMIZATION OF THE MAXIMUM FLOW BY NETWORK ANALYSIS

Yu.E. Gagarin, *Candidate of Engineering Sciences*
U.V. Nikitenko, *Senior Lecturer*
P.E. Belonozhko, *bachelor*
Bauman Moscow State Technical University (Kaluga Branch)
(Russia, Kaluga)

Abstract. *The article discusses the method of network analysis to optimize the maximum flow. By compressing several nodes into one node, this method allows you to build an equivalent network, which is a tree. This approach makes it possible to reduce the number of calculations of maximum flows between each pair of nodes, and each time the problem is solved in a simpler network.*
Keywords: *optimization, maximum flow, network analysis, minimum cut.*