

## ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ СОЦИАЛЬНОЙ СЕГРЕГАЦИИ

А.П. Михайлов, д-р ф.-м. наук, профессор, г.н.с.

А.П. Петров, д-р ф.-м. наук, профессор, г.н.с.

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН  
(Россия, г. Москва)

DOI: 10.24411/2500-1000-2020-10975

**Аннотация.** Работа посвящена построению и исследованию дифференциальной модели социальной сегрегации, основанной на подходе Т. Шеллинга. Здесь под сегрегацией понимается процесс разделения различных групп населения, именуемых общинами, по месту жительства в соответствии с расовой, этнической, религиозной принадлежностью. Конкретизация состоит в том, что предложены функциональные спецификации для зависимостей, заложенных в модель. Тем самым, модель приведена к системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений; проведен ее анализ, изучена устойчивость стационарных решений.

**Ключевые слова:** математическое моделирование, социальная сегрегация, поведенческая гипотеза, дифференциальные уравнения, фазовая плоскость.

### 1. Базовые положения модели

Рассматривается следующий механизм социальной сегрегации основана на следующем. Процесс начинается с того, что в результате миграции возникает ситуация совместного проживания двух общин в пределах одного квартала. Если в отношениях между общинами присутствуют конфликты, то некоторые представители одной из них выезжают из квартала. На освободившиеся места въезжают новые представители другой общины. Тем самым, пропорция изменяется в пользу второй общины, в результате чего еще некоторые представители первой общины покидают квартал, освобождая места для второй общины. Таким образом, с течением времени доля второй общины в населении постоянно возрастает.

В соответствии с подходом Шеллинга [1, 2], этот процесс формализуется следующим образом. Население состоит из двух общин, которые будем обозначать  $X$  и  $Y$ . Численность членов общин, проживающих в данном квартале в момент времени  $t$ , обозначим, соответственно,  $x(t)$  и  $y(t)$ .

Модель Шеллинга базируется на следующей поведенческой гипотезе. Предполагается, что индивид удовлетворен сосед-

ством в данном квартале, лишь если отношение численности «чужой» общины к численности его собственной общины не превышает некоторой величины, называемой порогом толерантности этого индивида. Значение порога толерантности не меняется с течением времени, и варьируется между индивидами: например, для кого-либо может быть достаточно не находиться в меньшинстве (т.е. порог равен единице), другой индивид может быть удовлетворен, если его община составляет не менее 30% населения квартала (в этом случае порог равен  $7/3$ ). Если текущее соотношение численностей ниже порога толерантности, то индивид удовлетворен соседством в квартале, и он остается в нем (или въезжает в квартал, если не жил в нем ранее), если же порог превышен, то индивид покидает квартал (или, не въезжает в него, если не живет в нем). При этом, для индивида, покинувшего квартал, сохраняется возможность с течением времени вернуться в него (и наоборот, новоприбывший житель может его впоследствии покинуть). Индивиды обладают полной информацией о количестве жителей квартала, принадлежащих к каждой из общин, но они не согласовывают свои действия, и не строят предположений о поведении других индивидов.

В соответствии со сформулированной выше поведенческой гипотезой, каждая община может быть охарактеризована распределением порогов толерантности среди ее членов. Для того, чтобы формализовать данную характеристику общины  $X$ , пронумеруем ее членов в порядке невозрастания порога толерантности, и каждому из этих членов (вернее, соответствующему номеру) поставим в соответствие его значение порога толерантности. При достаточно большой численности  $N$  проведем предельный переход, получив непрерывную, невозрастающую функцию  $f(n)$ , которую назовем распределением толерантности в данной общине.

Тогда функция  $y = xf(x)$  имеет смысл максимальной численности общины  $Y$ , при которой  $x$  наиболее толерантных членов общины  $X$  удовлетворены соседст-

вом в квартале. Таким образом, если  $y < xf(x)$ , то численность общины  $X$  возрастает, а если  $y > xf(x)$ , то убывает. Аналогично, если распределение толерантности в общине  $Y$  дается функцией  $g(y)$ , то  $x = yg(y)$  - это максимальная численность общины  $X$ , при которой  $y$  наиболее толерантных членов общины  $Y$  удовлетворены соседством в квартале. Если  $x < yg(y)$ , то численность общины  $Y$  возрастает, а если  $x > yg(y)$ , то убывает. Изобразим функции  $y = xf(x)$  и  $x = yg(y)$  на одном графике. Один из возможных вариантов получаемой при этом конфигурации представлен на рисунке 1.

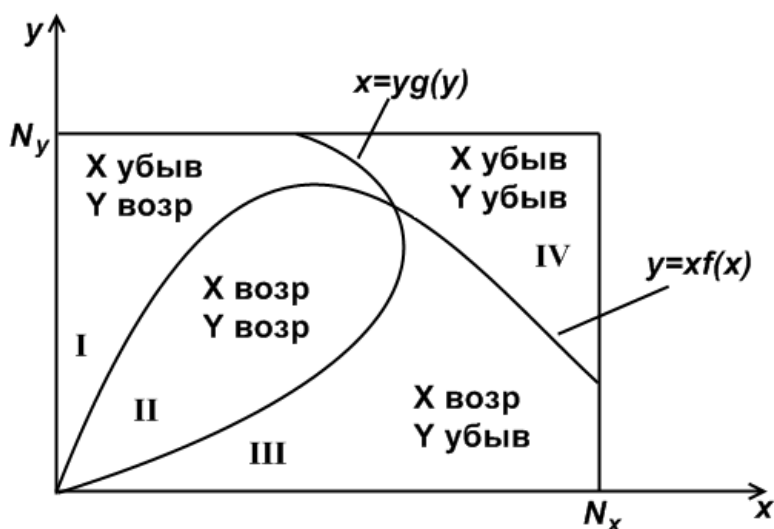


Рис. 1. Области значений переменных, в которых динамика численности членов общин  $X, Y$ , проживающих в квартале, имеет постоянное направление

Состоянию системы, при котором в квартале проживают  $x$  представителей первой общины и  $y$  – второй, соответствует точка  $(x, y)$  прямоугольника  $0 \leq x \leq N_x, 0 \leq y \leq N_y$ , где  $N_x, N_y$  – максимально возможные численности общин. Кривые  $y = xf(x)$  и  $x = yg(y)$  разбивают данный прямоугольник на четыре области, каждая из которых характе-

ризуется определенным направлением динамики (возрастанием или убыванием) численности членов общин.

Так, если точка  $(x_0, y_0)$ , изображающая начальное количество живущих в квартале членов общин  $X, Y$ , находится в области III, то с течением времени количество представителей общины  $X$  будет возрастать, а  $Y$  – убывать. Аналогично, если точка  $(x_0, y_0)$  расположена в области IV,

то будет убывать численность жителей обеих общин.

В работах [1, 2] эти положения реализованы в качественной форме; фактически мы повторили ее выше. Основная часть данной работы посвящена дифференциальной модели, в которой эта логика принимает более конкретную форму.

Заметим также, что в указанных работах [1, 2] представлен и другой вариант модели, в котором индивиды расположены на плоскости, образуя прямоугольную решетку, и решение о выезде из квартала принимается на основании соотношения численностей членов общин в ближайшей окрестности данного индивида (а не квартала в целом). Этот вариант модели близок клеточно-автоматному подходу, который в последние годы находит все больше приложений к моделированию социальных процессов [3]. Современные варианты модели рассматривают, например, теоретико-игровую постановку [4] и сегрегацию в сетевой структуре [5].

## 2. Конкретизация поведенческой гипотезы и построение дифференциальной модели

Изложенный выше анализ опирался лишь на качественную зависимость между текущим соотношением численностей общин и направлением динамики, другими

словами – на зависимость между величинами  $x(t), y(t)$  с одной стороны, и знаками величин  $dx/dt, dy/dt$  – с другой. Для того, чтобы получить дифференциальные уравнения, определяющие значения самих производных  $dx/dt, dy/dt$  (а не только их знаков), необходимо конкретизировать сформулированную выше поведенческую гипотезу.

Как указано выше, в соответствии с этой гипотезой, если  $x < yg(y)$ , то численность общины  $Y$  возрастает, а если  $x > yg(y)$ , то убывает. Изобразим график функции  $x = yg(y)$ , обозначим через  $x_1$  ее максимальное значение,  $y_1$  – значение аргумента, при котором достигается максимум, а также укажем стрелками направление изменения численности членов общины  $Y$  – рисунок 2а (данный рисунок соответствует случаю, когда функция  $x = yg(y)$  имеет ровно один локальный максимум  $x_1 < N_x$ ; все рассуждения легко обобщаются на более сложные случаи).

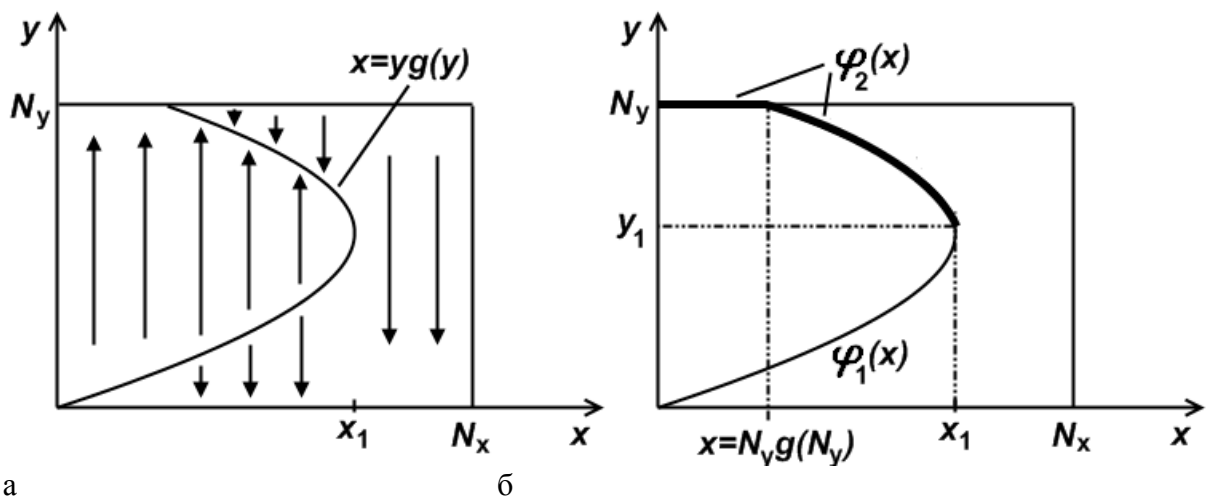


Рис. 2. Направление изменения численности членов общины  $Y$  и определение функций  $y = \varphi_1(x), y = \varphi_2(x)$

Обозначим через  $y = \varphi_1(x)$  функцию, обратную по отношению к  $x = yg(y)$  на отрезке  $0 \leq y \leq y_1$ , а через  $y = \varphi_2(x)$  - функцию, обратную по отношению к  $x = yg(y)$  на  $y_1 \leq y \leq N_y$ , и равную  $N_y$  при  $0 \leq x \leq N_y g(N_y)$  - см. рисунок 2б.

Для изменения численности общины  $Y$  имеем следующее.

$$\text{При } x \leq x_1: \begin{cases} \frac{dy}{dt} < 0, \text{ if } y < \varphi_1(x), \\ \frac{dy}{dt} > 0, \text{ if } \varphi_1(x) < y < \varphi_2(x), \\ \frac{dy}{dt} < 0, \text{ if } y > \varphi_2(x). \end{cases} \quad (1)$$

$$\text{При } x > x_1: \frac{dy}{dt} < 0.$$

Простейшее дифференциальное уравнение, отражающее данную закономерность, имеет вид

$$\frac{dy}{dt} = \begin{cases} -\alpha y(y - \varphi_1(x))(y - \varphi_2(x)), & 0 \leq x \leq x_1, \\ -\alpha y, & x_1 \leq x \leq N_x. \end{cases} \quad (2)$$

Аналогично получим уравнение, описывающее динамику численности проживающих в квартале членов общины  $X$ .

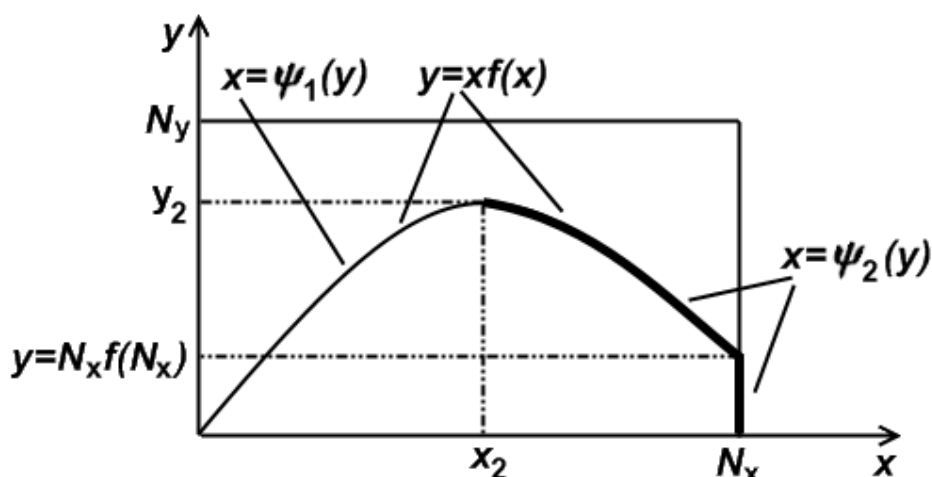


Рис. 3. Направление изменения численности членов общины  $X$  и определение функций  $x = \psi_1(y)$ ,  $x = \psi_2(y)$

Изобразим график функции  $y = xf(x)$ , обозначим через  $y_2$  ее максимальное значение,  $x_2$  - значение аргумента, при котором достигается максимум - рисунок 3 (при этом, ограничимся случаем, когда  $y_2 < N_y$ , и функция  $y = xf(x)$  имеет ровно один локальный максимум). Обозначим через  $x = \psi_1(y)$  функцию, обратную по отношению к  $y = xf(x)$  на отрезке  $0 \leq x \leq x_2$ , а через  $x = \psi_2(y)$  - функцию, обратную по отношению к

$y = xf(x)$  на отрезке  $x_2 \leq x \leq N_x$ , и равную  $N_x$  при  $0 \leq y \leq N_x f(N_x)$ .

Простейшее дифференциальное уравнение, качественно отражающее динамику численности проживающих в квартале членов общины  $X$ , имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = \begin{cases} -\beta x(x - \psi_1(y))(x - \psi_2(y)), & 0 \leq y \leq y_2 \\ -\beta x, & y_2 \leq y \leq N_y \end{cases} \quad (3)$$

Уравнения (2), (3) являются конкретизацией поведенческой гипотезы, сформулированной в п.1. Они дополняются начальными условиями

$$x(0) = x^0, y(0) = y^0, \quad (4)$$

где  $0 < x^0 \leq N_x, 0 < y^0 \leq N_y$ .

### 3. Анализ математической модели

Анализ качественной модели показал [1, 2], что стационарные решения  $x = 0, y = N_y, x = N_x, y = 0$  являются асимптотически устойчивыми, в то время, как стационарные состояния, при которых общины сосуществуют в квартале, могут быть как устойчивыми, так и неустойчивыми.

Изучим теперь вопрос об устойчивости стационарных решений модели (2)-(4).

Рассмотрим сначала решение

$$x = 0, y = N_y \quad (5)$$

В его окрестности уравнения (3), (2) принимают вид

$$\frac{dx}{dt} = -\beta x \quad (6)$$

$$\frac{dy}{dt} = -\alpha y (y - \varphi_1(x))(y - N_y) \quad (7)$$

Очевидно, при достаточно малых  $\delta$ , в области вида  $0 < x < \delta, N_y - \delta < y < N_y$  имеем  $dx/dt < 0, dy/dt > 0$ . Отсюда следует, что если начальные условия (4) лежат в этой области, то  $x(t) \rightarrow 0, N(t) \rightarrow N_y$  при  $t \rightarrow \infty$ , что согласуется с результатом анализа качественной модели [1, 2].

Аналогично доказывается асимптотическая устойчивость решения

$$x = N_x, y = 0 \quad (8)$$

Перейдем к исследованию стационарных решений, описывающих состояния, при которых общины сосуществуют в квартале. В окрестности каждого из них уравнения (3), (2) принимают вид

$$\frac{dx}{dt} = -\beta x (x - \psi_1(y))(x - \psi_2(y)) \quad (9)$$

$$\frac{dy}{dt} = -\alpha y (y - \varphi_1(x))(y - \varphi_2(x)) \quad (10)$$

Уравнения для рассматриваемых стационарных решений имеют вид

$$(x - \psi_1(y))(x - \psi_2(y)) = 0 \quad (11)$$

$$(y - \varphi_1(x))(y - \varphi_2(x)) = 0 \quad (12)$$

Количество стационарных решений зависит от вида функций распределения толерантности  $y = f(x), x = g(y)$ . Каждое из них может быть исследовано на устойчивость – например, с помощью метода исследования устойчивости по первому приближению.

Продемонстрируем это для случая линейных функций распределения толерантности:

$$f(x) = a - bx, g(y) = c - ky \quad (13)$$

Тогда максимальная численность общины  $Y$ , при которой  $x$  наиболее толерантных членов общины  $X$  удовлетворены соседством в квартале, дается функцией

$$y = xf(x) = ax - bx^2 \quad (14)$$

Максимальное значение функции (14) достигается при  $x_2 = a/(2b)$ , оно равно  $y_2 = a^2/(4b)$ . Чтобы найти обратные функции  $x = \psi_1(y), x = \psi_2(y)$ , выразим  $x$  через  $y$  из равенства (14), получим

$$\psi_1(y) = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4by}}{2b},$$

$$\psi_2(y) = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4by}}{2b} \quad (15)$$

Аналогично, максимальная численность общины X, при которой у наиболее толерантных членов общины Y удовлетворены соседством в квартале, дается функцией

$$x = yg(y) = cy - ky^2 \quad (16)$$

Максимальное значение функции (16) достигается при  $y_1 = c / (2d)$ , оно равно  $x_1 = c^2 / (4d)$ . Для обратных функций имеем

$$\varphi_1(x) = \frac{c - \sqrt{c^2 - 4kx}}{2k},$$

$$\varphi_2(x) = \frac{c + \sqrt{c^2 - 4kx}}{2k} \quad (17)$$

Система (9), (10) принимает в данном случае вид

$$\frac{dx}{dt} = -\beta x \left( x - \frac{a - \sqrt{a^2 - 4by}}{2b} \right) \left( x - \frac{a + \sqrt{a^2 - 4by}}{2b} \right) \quad (18)$$

$$\frac{dy}{dt} = -\alpha y \left( y - \frac{c - \sqrt{c^2 - 4kx}}{2k} \right) \left( y - \frac{c + \sqrt{c^2 - 4kx}}{2k} \right) \quad (19)$$

Уравнение (18) можно записать в виде

$$\frac{dx}{dt} = -\beta x \left( x - \frac{a}{2b} + \frac{\sqrt{a^2 - 4by}}{2b} \right) \left( x - \frac{a}{2b} - \frac{\sqrt{a^2 - 4by}}{2b} \right), \quad (20)$$

откуда

$$\frac{dx}{dt} = -\beta x \left( \left( x - \frac{a}{2b} \right)^2 - \frac{a^2 - 4by}{4b^2} \right), \quad (21)$$

Аналогично, из (19) имеем

$$\frac{dy}{dt} = -\alpha y \left( \left( y - \frac{c}{2k} \right)^2 - \frac{c^2 - 4kx}{4k^2} \right) \quad (22)$$

Рассмотрим вопрос об устойчивости стационарного решения  $(x_s, y_s)$  такого, что

$$x_s > 0, y_s > 0, \quad (23)$$

описывающего ситуацию, при которой две общины сосуществуют в квартале. Приравнивая к нулю производные в

(21), (22), и учитывая (23), получаем, что  $x_s, y_s$  удовлетворяют системе

$$\left( x_s - \frac{a}{2b} \right)^2 - \frac{a^2 - 4by_s}{4b^2} = 0, \quad (24)$$

$$\left( y_s - \frac{c}{2k} \right)^2 - \frac{c^2 - 4kx_s}{4k^2} = 0. \quad (25)$$

Матрица Якоби, взятая в стационарных состояниях, удовлетворяющих уравнениям (24), (25), имеет вид

$$J(x_s, y_s) = \begin{pmatrix} -2\beta x_s \left( x_s - \frac{a}{2b} \right) & -\frac{\beta x_s}{b} \\ -\frac{\alpha y_s}{k} & -2\alpha y_s \left( y_s - \frac{c}{2k} \right) \end{pmatrix} \quad (26)$$

Если оба собственных значения матрицы вида (26) имеют отрицательные действительные части, то стационарное решение  $(x_s, y_s)$  асимптотически устойчиво, если же хотя бы одно из собственных значений имеет положительную действительную часть, то стационарное решение неустойчиво.

Заметим, что, помимо решений рассмотренных выше стационарных решений (5), (8), (23), система (18), (19) имеет также стационарное решение  $x_s = y_s = 0$ . Оно не может быть изучено методом исследования устойчивости по первому приближению, так как матрица Якоби в точке  $x_s = y_s = 0$  является нулевой матрицей, и ее собственные значения равны нулю, что не позволяет сделать вывод относительно устойчивости. Однако, неустойчивость этого стационарного решения может быть показана путем анализа знаков производных  $dx/dt, dy/dt$  в окрестности этой точки.

#### 4. Заключение

Представленная в настоящей работе модель описывает механизм социальной сегрегации, основанный на неудовлетворенности индивидов проживанием «среди чужих», сформулированном здесь в виде

поведенческой гипотезы. Один из возможных социологических сценариев описывает полный исход одной из общин из квартала. Пусть, например, изначально община X находилась в меньшинстве, но некоторые из ее членов были удовлетворены текущим соотношением. Однако по мере того, как другие, менее толерантные, члены общины X покидают квартал, соотноше-

ние меняется еще более в пользу общины Y. Ввиду этого, некоторые из ранее удовлетворенных членов общины X становятся неудовлетворенными, и также покидают квартал. Этот процесс может иметь два исхода. В одном из них вся община X покидает квартал, в другом исходе устанавливается совместное проживание общин в некоторой пропорции.

#### Библиографический список

1. Schelling T.C. Models of Segregation // The American Economic review. – 1969. – Vol. 59. № 2. – P. 488-493.
2. Schelling T.C. Dynamic Models of Segregation // Journal of Mathematical Sociology. – 1971. – Vol. 1. – P. 143-186.
3. Stepantsov M.E. Information warfare model based on a cellular automaton // Computational Mathematics and Information Technologies. – 2020. – № 1. – P. 12-18. doi: 10.23947/2587-8999-2020-1-1-12-18.
4. Zhang J. Tipping and residential segregation: a unified Schelling model // Journal of Regional Science. – 2011. – Vol. 51 (1). – P. 167-193.
5. Fagiolo G., Valente M., Vriend N.J. Segregation in networks // Journal of economic behavior & organization. – 2007. – Vol. 64 (3-4). – P. 316-336.

### DIFFERENTIAL MODEL OF SOCIAL SEGREGATION

**A.P. Mikhailov**, *Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Chief Researcher*  
**A.P. Petrov**, *Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Chief Researcher*  
**Keldysh Institute of Applied Mathematics RAS**  
 (Russia, Moscow)

**Abstract.** *The paper introduces and studies of a differential model of social segregation. The model is based on well-known approach by Schelling. Segregation is viewed as the process of self-separating various groups of the population, called communities, according to place of residence in accordance with racial, ethnic, or religious affiliation. Concretization consists in the fact that functional specifications for the dependencies embedded in the model are proposed. Thus, the model is reduced to a system of two ordinary differential equations; its analysis is carried out, the stability of stationary solutions is studied.*

**Keywords:** *mathematical modeling, social segregation, behavioral hypothesis, differential equations, phase plane.*