ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНОГО ВОЛЬТЕРРОВА ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С НЕПОЛНЫМИ ЯДРАМИ

С. Искандаров[1], *д-р физ.-мат. наук, профессор, зав. лабораторией теории интегро-дифференциальных уравнений*
Н.А. Абдирайимова[2], *аспирант*
[1]Институт математики НАН Кыргызской Республики
[2]Ошского государственного университета
[1](Кыргызстан, г. Бишкек)
[2](Кыргызстан, г. Ош)

DOI: 10.24411/2500-1000-2020-10136

Аннотация. *Устанавливаются достаточные условия асимптотической устойчивости решений линейного интегро-дифференциального уравнения типа Вольтерра с неполными ядрами на полуоси. Для этого развиваются метод вспомогательных ядер, нестандартный метод сведения к системе, метод возведения уравнений в квадрат, метод преобразования уравнений В. Вольтерра, метод срезывающих функций, метод интегральных неравенств Ю.А. Ведь, З. Пахырова, лемма Люстерника-Соболева. Строится иллюстративный пример, показывающий естественность наложенных условий.*

Ключевые слова: *интегро-дифференциальное уравнение третьего порядка, неполные ядра, асимптотическая устойчивость решений, интегральное неравенство, метод вспомогательных ядер, нестандартный метод сведения к системе, лемма Люстерника-Соболева, иллюстративный пример.*

Все фигурирующие в настоящей работе функции и их производные являются непрерывными и соотношения имеют место при $t \geq t_0,\ t \geq \tau \geq t_0;\ \mathrm{I} = [t_0, \infty)$; ИДУ–интегро-дифференциальное уравнение; под асимптотической устойчивостью решений линейного ИДУ третьего порядка понимается стремление к нулю при $t \to \infty$ всех его решений и их первых и вторых производных.

Задача. Установить достаточные условия асимптотической устойчивости решений линейного ИДУ третьего порядка типа Вольтерра вида:

$$x'''(t) + a_2(t)x''(t) + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) + \int_{t_0}^{t} [Q_0(t,\tau)x(\tau) + Q_1(t,\tau)x'(\tau)]d\tau = f(t), \quad t \geq t_0 \tag{1}$$

в случае, когда выполняются условия:

$$\int_{t_0}^{\infty}\int_{t_0}^{t} |Q_k(t,\tau)| d\tau dt = \infty \qquad (k = 0,\ 1). \tag{Q}$$

Заметим, что в ИДУ (1) отсутствует ядро с $x''(\tau)$. Такое ИДУ будем называть ИДУ с неполными ядрами. Поставленная нами задача, насколько нам известно, почти не изучена. Анализ опубликованных работ показывает, что имеются много работ для ИДУ вида (1) с полными ядрами, т.е. с ядрами $Q_k(t,\tau)\ (k = 0,1,2)$. Используя идею метода вспомогательных ядер [1], мы в ИДУ (1) вводим некоторое ядро $\mathrm{H}(t,\tau)$ с $x''(\tau)$ по правилу "веса" [2, с.114], а именно будем развивать метод вспомогательных ядер и в сочетании с другими методами будем находить класс ИДУ вида (1), для которого решаема сформулированная выше задача. Отметим, что поставленная нами задача ранее никем не решена.

Результаты иследования. В ИДУ (1) вводим ядро $\mathrm{H}(t,\tau)$ с $x''(\tau)$ следующим образом:

$$Q_0(t,\tau)x(\tau)+Q_1(t,\tau)x'(\tau)=Q_0(t,\tau)x(\tau)+Q_1(t,\tau)x'(\tau)+\mathrm{H}(t,\tau)x''(\tau)-\mathrm{H}(t,\tau)x''(\tau) \tag{2}$$

и проведем следующее интегрирование по частям:

$$-\int_{t_0}^{t}\mathrm{H}(t,\tau)x''(\tau)d\tau=-\mathrm{H}(t,t)x'(t)+\mathrm{H}(t,t_0)x'(t_0)+\int_{t_0}^{t}\mathrm{H}'_\tau(t,\tau)x'(\tau)d\tau. \tag{3}$$

В результате ИДУ (1) сводится к нагруженному ИДУ вида:

$$x''(t)+a_2(t)x''(t)+a(t)x'(t)+a_0(t)x(t)+\int_{t_0}^{t}\left[Q_0(t,\tau)x(\tau)+Q(t,\tau)x'(\tau)+\mathrm{H}(t,\tau)x''(\tau)\right]d\tau=$$
$$=f(t)-\mathrm{H}(t,t_0)x'(t_0), \tag{4}$$

где $a(t)\equiv a_1(t)-\mathrm{H}(t,t),\quad Q(t,\tau)\equiv Q_1(t,\tau)+\mathrm{H}'_\tau(t,\tau).$

Далее в ИДУ (4) сделаем следующую нестандартную замену [3]:

$$x'(t)+\lambda^2 x(t)=W(t)y(t), \tag{5}$$

где λ-некоторый вспомагательный параметр, причем $\lambda\in R,\ 0<W(t)$-некоторая весовая функция, $y(t)$-новая неизвестная функция.

Тогда ИДУ (4) сводится к следующей эквивалентной системе:

$$\begin{cases} x'(t)+\lambda^2 x(t)=W(t)y(t), \\ y''(t)+b_2(t)y'(t)+b_1(t)y(t)+b_0(t)x(t)+ \\ +\int_{t_0}^{t}\left[T_0(t,\tau)x(\tau)+T_1(t,\tau)y(\tau)+K(t,\tau)y'(\tau)\right]d\tau=F(t)-(W(t))^{-1}\mathrm{H}(t,t_0)x'(t_0), \end{cases} \tag{6}$$

где

$b_2(t)\equiv a_2(t)-\lambda^2+2W'(t)(W(t))^{-1},\ \ b_1(t)\equiv a(t)+\lambda^4+a_2(t)\left[W'(t)(W(t))^{-1}-\lambda^2\right]+W'_*(t)(W(t))^{-1},$

$W_*(t)\equiv W'(t)-\lambda^2 W(t),\qquad b_0(t)\equiv\left[a_0(t)-\lambda^2 a(t)+\lambda^4 a_2(t)-\lambda^6\right](W(t))^{-1},$

$T_0(t,\tau)\equiv(W(t))^{-1}\left[Q_0(t,\tau)-\lambda^2 Q(t,\tau)+\lambda^4\mathrm{H}(t,\tau)\right],\qquad T_1(t,\tau)\equiv(W(t))^{-1}\left[Q(t,\tau)W(\tau)+\mathrm{H}(t,\tau)W_*(\tau)\right],$

$K(t,\tau)\equiv(W(t))^{-1}\mathrm{H}(t,\tau)W(\tau),F(t)\equiv f(t)(W(t))^{-1}.$

Исследование системы (6) проведем аналогично, как в [4].

Сначала к первому уравнению системы (6) применим метод возведения уравнений в квадрат[2, с.28], т.е. возводим в квадрат обе части этого уравнения, интегрируем в пределах от t_0 до t, в том числе по частям, и получаем следующее тождество:

$$\int_{t_0}^{t}(x'(s))^2ds+\lambda^2(x(t))^2+\lambda^4\int_{t_0}^{t}(x(s))^2ds\equiv\lambda^2(x(t_0))^2+\int_{t_0}^{t}(W(s))^2(y(s))^2ds. \tag{7}$$

Теперь преобразуем второе уравнение системы (6), т.е. ИДУ второго порядка для $y(t)$. Для этого сделаем следующие предположения и обозначения [2]:

$$K(t,\tau)=\sum_{i=0}^{n}K_i(t,\ \tau), \tag{K}$$

$$F(t)=\sum_{i=0}^{n}F_i(t), \tag{F}$$

$\psi_i(t)\quad(i=1..n)$ - некоторые срезывающие функции,

$$R_i(t,\tau)\equiv K_i(t,\tau)\big(\psi_i(t)\psi_i(\tau)\big)^{-1},\qquad E_i(t)\equiv F_i(t)\big(\psi_i(t)\big)^{-1}\quad(i=1..n),$$
$$R_i(t,t_0)=A_i(t)+B_i(t)\qquad(i=1..n), \tag{R}$$

$c_i(t)\quad(i=1..n)$ - некоторые функции.

Для произвольно фиксированного решения $(x(t),y(t))$ системы (6) ее второе уравнение умножаем на $y'(t)$ [5, с. 194-217], интегрируем в пределах от t_0 до t, в том числе по частям, аналогично [2] вводим условия (K), (F), функции $\psi_i(t),\ R_i(t,\tau),\ E_i(t),\ c_i(t)\quad(i=1..n),$ условие (R), при этом применим леммы 1.4, 1.5 [6] и имеем следующее тождество:

$$(y'(t))^2+2\int_{t_0}^{t}b_2(s)(y'(s))^2ds+b_1(t)(y(t))^2+\sum_{i=1}^{n}\{A_i(t)(Z_i(t,t_0))^2+B_i(t)(Z_i(t,t_0))^2-2E_i(t)Z_i(t,t_0)+$$
$$+c_i(t)-\int_{t_0}^{t}\big[B_i'(s)(Z_i(s,t_0))^2-2E_i'(s)Z_i(s,t_o)+c_i'(s)\big]ds+\int_{t_0}^{t}R_{i\tau}'(t,\tau)(Z_i(t,\tau))^2d\tau\}\equiv$$
$$\equiv c_*^0+2\int_{t_0}^{t}y'(s)\big[F_0(s)-(W(s))^{-1}\mathrm{H}(s,t_0)\,x'(t_o)\big]ds+\int_{t_0}^{t}b_1'(s)(y(s))^2ds+$$
$$+\sum_{i=1}^{n}\int_{t_0}^{t}\left[A_i'(s)(Z_i(s,t_0))^2+\int_{t_0}^{s}R_{is\tau}''(s,\tau)(Z_i(s,\tau))^2d\tau\right]ds-$$
$$-2\int_{t_0}^{t}y'(s)\left\{b_0(s)x(s)+\int_{t_0}^{s}\big[T_0(s,\tau)x(\tau)+T_1(s,\tau)y(\tau)+K_0(s,\tau)y'(\tau)\big]d\tau\right\}ds, \tag{8}$$

где $Z_i(t,\tau)\equiv\int_{\tau}^{t}\psi_i(\eta)y'(\eta)d\eta\qquad(i=1..n),\qquad c_*^0=(y'(t_0))^2+b_1(t_0)\,(y(t_0))^2+\sum_{i=1}^{n}c_i(t_0).$

Сложим тождества (7), (8) и для любого решения $(x(t),y(t))$ системы (6) будем получать следующее окончательное тождество:

$$u(t)\equiv\int_{t_0}^{t}(x'(s))^2ds+\lambda^2(x(t))^2+\lambda^4\int_{t_0}^{t}(x(s))^2ds+(y'(t))^2+2\int_{t_0}^{t}b_2(s)(y'(s))^2ds+b_1(t)(y(t))^2+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\{A_i(t)\,(Z_i(t,t_0))^2+B_i(t)\,(Z_i(t,t_0))^2-2E_i(t)Z_i(t,t_0)+c_i(t)-$$

$$-\int_{t_0}^{t}\left[B_i'(s)\,(Z_i(s,t_0))^2-2E_i'(s)Z_i(s,t_0)+c_i'(s)\right]ds+\int_{t_0}^{t}R_{i\tau}'(t,\tau)\,(Z_i(t,\tau))^2d\tau\}\equiv c_{**}^{o}+\int_{t_0}^{t}(W(s))^2(y(s))^2ds+$$

$$+2\int_{t_0}^{t}y'(s)[F_0(s)-(W(s))^{-1}\mathrm{H}(s,t_0)\,x'(t_0)]ds+\int_{t_0}^{t}b_1'(s)(y(s))^2ds+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\int_{t_0}^{t}\left[A_i'(s)\,(Z_i(s,t_0))^2+\int_{t_0}^{s}R_{is\tau}''(s,\tau)\,(Z_i(s,\tau))^2d\tau\right]ds-$$

$$-2\int_{t_0}^{t}y'(s)\left\{b_0(s)\,x(s)+\int_{t_0}^{s}\left[T_0(s,\tau)\,x(\tau)+T_1(s,\tau)\,y(\tau)+K_0(s,\tau)\,y'(\tau)\right]d\tau\right\}ds,\qquad(9)$$

где $c_{**}^{0}=\lambda^2(x(t_o))^2+c_{*}^{0}.$

Переходя к интегральному неравенству, применяя лемму 1 [7], аналогично теореме 2.1 [2] доказывается.

Теорема. Пусть 1) $\lambda\neq 0,\ W(t)>0;$ выполняются условия (K), (F), (R);

2) $b_2(t)\geq 0;$ 3) $b_1(t)\geq b_{10}>0,$ существует функция $b_1^*(t)\in L^1(I,R_+)$ такая, что $b_1'(t)\leq b_1^*(t)b_1(t);$

4) $A_i(t)\geq 0,$ $B_i(t)\geq 0,$ $B_i'(t)\leq 0,$ $R_{i\tau}'(t,\tau)\geq 0,$ существуют функции $A_i^*(t)\in L^1(I,R_+),\ c_i(t),\ R_i^*(t)\in L^1(I,R_+)$ такие, что $A_i'(t)\leq A_i^*(t)A_i(t),\ \left(E_i^{(k)}(t)\right)^2\leq B_i^{(k)}(t)c_i^{(k)}(t),\ R_{it\tau}''(t,\tau)\leq R_i^*(t)R_{i\tau}'(t,\tau)\quad(i=1..n;\ k=0,1);$

5)

$$(W(t))^2+|b_0(t)|+|F_0(t)|+(W(t))^{-1}|\mathrm{H}(t,t_0)|+\int_{t_0}^{t}[|T_0(t,\tau)|+|T_1(t,\tau)|+|K_0(t,\tau)|]d\tau\in L^1(I,R_+\setminus\{0\}).$$

Тогда для любого решения $(x(t),y(t))$ системы (6) верны следующие утверждения:

$$x^{(k)}(t)\in L^2(I,R)\qquad(k=0,1),\qquad(10)$$

$$x(t)=O(1),\qquad y^{(k)}(t)=O(1),\qquad(11)$$

$$b_2(t)(y'(t))^2\in L^1(I,R_+),\qquad A_i(t)(Z_i(t,t_0))^2=O(1)\ \ (i=1..n).\qquad(12)$$

В результате применения леммы 1 [7], получается, что $u(t)=O(1),$ из которой следует, что

$$\int_{t_0}^{t}(x'(s))^2ds+\lambda^2(x(t))^2+\lambda^4\int_{t_0}^{t}(x(s))^2ds+(y'(t))^2+2\int_{t_0}^{t}b_2(s)(y'(s))^2ds+b_1(t)(y(t))^2+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\left[A_i(t)\,(Z_i(t,t_0))^2+\int_{t_0}^{t}R_{i\tau}'(t,\tau)\,(Z_i(t,\tau))^2d\tau\right]\leq u(t)=O(1).$$

Отсюда вытекают все утверждения (10)-(12) теоремы.

Следствие. Если выполняются все условия теоремы и $W^{(k)}(t) \to 0 \quad (k=0,1)$ при $t \to \infty$, то для любого решения $x(t)$ ИДУ (1) справедливы соотношения:

$x^{(k)}(t) \to 0 \qquad (k=0,1,2)$ при $t \to \infty$, т.е. любое решение ИДУ (1) асимптотически устойчиво.

Действительно, из (10) в силу леммы Люстерника-Соболева [8, с. 393-394; 4] имеем: $x(t) \to 0$, $t \to \infty$. После чего с учетом утверждений (11) и в силу условий $W^{(k)}(t) \to 0 \quad (k=0,1)$ при $t \to \infty$ из замены (5) и из соотношения $x''(t) = -\lambda^2 x'(t) + W(t)y'(t) + W'(t)y(t)$ получаем, что $x'(t) \to 0$, $x''(t) \to 0$, $t \to \infty$ соответственно. Значит, $x^{(k)}(t) \to 0 \quad (k=0,1,2)$ при $t \to \infty$, и любое решение $x(t)$ ИДУ (1) асимптотически устойчиво.

Пример. ИДУ (1) с

$$t_0 = 0,\ \ a_2(t) \equiv 3 + e^{\sqrt{t}},\ a_1(t) \equiv 2(3 + e^{\sqrt{t}}) + e^{2t^2}\left[\frac{2t+1}{2(t+1)} + 1\right]\sin^2 t,$$

$$a_0(t) \equiv 4 + e^{\sqrt{t}} - e^{-2t},\quad Q_0(t,\tau) \equiv \mathrm{H}(t,\tau) - \frac{e^{-t+\tau}\sin 2\tau}{(t^2+\tau^2+3)^4} + \frac{e^{-2t}}{t+\tau+7},$$

$$Q_1(t,\tau) \equiv 2\mathrm{H}(t,\tau) - \mathrm{H}'_\tau(t,\tau) - \frac{e^{-t+\tau}\sin 2\tau}{(t^2+\tau^2+3)^4},$$

$$f(t) \equiv -\frac{e^{t^2-t}\sin t}{t+4},$$

удовлетворяет всем условиям теоремы и следствия при

$$\mathrm{H}(t,\tau) \equiv e^{-t+\tau}e^{t^2+\tau^2}\left[\frac{t+\tau+1}{t+\tau+2} + \frac{1}{t-\tau+1}\right]\sin t \sin\tau,\qquad \lambda = 1,\quad W(t) \equiv e^{-t},$$

здесь $t_0 = 0$,

$$\mathrm{H}(t,o) \equiv o,\qquad b_2(t) \equiv e^{\sqrt{t}},\qquad b_1(t) \equiv 3,$$

$$b_0(t) \equiv -e^{-t},\quad T_0(t,\tau) \equiv -\frac{e^{-t}}{t+\tau+7},\quad T_1(t,\tau) \equiv -\frac{\sin 2\tau}{\left(t^2+\tau^2+3\right)^4},$$

$$K(t,\tau) \equiv e^{t^2+\tau^2}\left[\frac{t+\tau+1}{t+\tau+2} + \frac{1}{t-\tau+1}\right]\sin t \sin\tau,$$

$$F(t) \equiv -\frac{e^{t^2}\sin t}{t+4},\ n = 1,\ \psi_1(t) \equiv e^{t^2}\sin t,\ R_1(t,\tau) \equiv \frac{t+\tau+1}{t+\tau+2} + \frac{1}{t-\tau+1},\ K_0(t,\tau) \equiv 0,$$

$$F_1(t) \equiv F(t),\ F_0(t) \equiv 0,\ E_1(t) \equiv -\frac{1}{t+4},\ R_1^*(t) \equiv 0,\ A_1(t) \equiv \frac{t+1}{t+2},\ A_1^*(t) \equiv \frac{1}{(t+1)(t+2)},$$

$$B_1(t) \equiv \frac{1}{t+1},\quad c_1(t) \equiv \frac{1}{t+1}.$$

Заключение. Таким образом, нами развит метод вспомогательных ядер в сочетании с другими хорошо известными методами и найден класс линейных ИДУ третьего порядка типа Вольтерра с неполными ядрами, для которого решаема рассматриваемая выше задача.

Библиографический список

1. *Искандаров С. О* влиянии вольтерровых интегральных возмущений на ограниченность решений линейных дифференциальных уравнений // Вестник КГНУ. Сер. естественно-техн. науки. – Бишкек, 1998. – Вып. 1. – С. 83-87.

2. *Искандаров С.* Метод весовых и срезывающих функций и асимптотические свойства решений интегро-дифференциальных и интегральных уравнений типа Вольтерра. – Бишкек: Илим, 2002. – 216 с.

3. *Искандаров С. О* методе сведения к системе для линейного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения второго порядка // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. – Бишкек: Илим, 2006. – Вып. 35. – С. 31-35.

4. *Искандаров С.* Об одном нестандартном методе исследования асимптотической устойчивости решений линейного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения четвертого порядка // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. – Бишкек: Илим, 2012. – Вып. 44. – С. 44-51.

5. *Вольтерра В.* Математическая теория борьбы за существование: Пер. с фр / Под ред. Ю.М. Свирежева. – М: Наука, 1976. – 288 с.

6. *Искандаров С*. Метод весовых и срезывающих функций и асимптотические свойства решений уравнений типа Вольтерра: Автореф. дисс…. докт. физ.-мат. наук: 01.01.02. – Бишкек, 2003. – 34 с.

7. *Ведь Ю.А.* Пахыров З. Достаточные признаки ограниченности решений линейных интегро-дифференциальных уравнений // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям в Киргизии. – Фрунзе: Илим, 1973. – Вып. 9. – С. 68-103.

8. *Люстерник Л.А.,* Соболев В.И. Элементы функционального анализа. – М.: Наука, 1965. – 520 с.

ABOUT ASYMPTOTIC STABILITY OF SOLUTIONS OF THE LINEAR VOLTERRA INTEGRO - DIFFERENTIAL EQUATION OF THE THIRD ORDER WITH INCOMPLETE KERNELS

S. Iskandarov[1], *Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Head of the Laboratory of the Theory of Integro-Differential Equations*
N.A. Abdirayimova[2], *Postgraduate*
[1] Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of the Kyrgyz Republic
[2] Osh State University
[1] (Kyrgyzstan, Bishkek)
[2] (Kyrgyzstan, Osh)

Abstract. *Sufficient conditions of asymptotic stability of solutions of linear integro-differential equation of Volterra type with incomplete kernels on the semi axles are established. For this, the method of auxiliary kernels, the non-standard method of reduction to the system, the method of squaring equations, V. Volterra method of transformation of the equations, method of cutting functions, YU.A. Ved's, Z. Pakhirov's method of integral inequalities, Lusternik-Sobolev lemma. An illustrative example is constructed showing the naturalness of the imposed conditions.*

Keywords*: the third-order integro-differential equation, incomplete kernels, asymptotic stability of solutions, integral inequality, method auxiliary kernels, the non-standard method of reduction to the system, Lusternik-Sobolev lemma, illustrative example.*