МОДЕЛЬ ЛАНЧЕСТЕРА КАК ДИСКРЕТНАЯ УПРАВЛЯЕМАЯ СИСТЕМА

Л.А. Сазанова, *канд. физ.-мат. наук*
Уральский государственный экономический университет
(Россия, г. Екатеринбург)

Аннотация. *Рассматривается дискретный аналог модели Ланчестера, описывающей поведение двух противоборствующих участников военного конфликта. Главной характеристикой соперников являются численности сторон, изменяющиеся в зависимости от различных факторов, как обусловленных действиями соперников, так и не связанных напрямую с военными действиями. Ставится цель достижения нужной численности армий к концу заданного периода. Решение предложенной задачи сводится к отысканию оптимального управляющего воздействия в соответствующей линейной дискретной управляемой системе.*

Ключевые слова*: линейная дискретная система, модель Ланчестера, оптимальное управление.*

Законы Ланчестера представляют собой математические формулы для расчета относительных сил пары сражающихся сторон – подразделений вооруженных сил. Наиболее известными и получившими широкое распространение являются так называемые Ланчестеровские модели [1, 2], использующие аппарат дифференциальных уравнений для описания динамики численности сил участников военных конфликтов как функции от времени. В 1916 году, в разгар первой мировой войны, Фредерик Ланчестер разработал систему дифференциальных уравнений для демонстрации соотношения между противостоящими силами. Среди них выделяют так называемые Линейные законы Ланчестера (первого рода или честного боя, для рукопашного боя или неприцельного огня) и Квадратичные законы Ланчестера (для войн начиная с XX века с применением прицельного огня, дальнобойных орудий, огнестрельного оружия) [3].

Однако зачастую в исследуемых системах передача, обработка и преобразование информации об интересующих исследователей характеристиках осуществляются в дискретные моменты времени. При этом соответствующих дискретных аналогов указанных моделей насчитывается сравнительно немного. Например, в [4] модель представлена как марковский процесс с дискретными состояниями. В предлагаемой ниже работе рассмотрен дискретный вариант линейной модели Ланчестера в терминах линейных управляемых систем. Задача достижения нужной численности армий противоборствующих сторон к концу известного периода решается через построение оптимального программного управляющего воздействия, которое по смыслу соответствует направляемым в армии противников подкреплениям.

Постановка задачи. Рассматривается дискретный аналог линейной модели Ланчестера [5], описывающей боевые действия двух армий. Главной характеристикой соперников являются численности сторон $x_1(k) \geq 0$ $x_2(k) \geq 0$. В случае действий между регулярными частями динамика их численности определяется следующими тремя факторами:

1. Скоростью уменьшения a_i $(i=1,2)$ состава из-за причин, непосредственно не связанных с боевыми действиями (болезни, дезертирство);
2. Темпом потерь, обусловленных боевыми действиями противоборствующей стороны β_i $(i=1,2)$, которые определяются качеством ее стратегии, тактики, вооружениями;
3. Скоростью поступления подкреплений, которая в дальнейшем трактуется как управляющее воздействие, $\gamma_i(k)$, $(i=1,2)$.

При сделанных предположениях получаем систему первых разностей для $x_1(k)$, $x_2(k)$:

$$\begin{cases} x_1(k+1) - x_1(k) = -\alpha_1 x_1(k) - \beta_2 x_2(k) + \gamma_1(k); \\ x_2(k+1) - x_2(k) = -\alpha_2 x_2(k) - \beta_1 x_1(k) + \gamma_2(k). \end{cases}$$

Здесь, k – дискретные периоды времени (например, номер месяца), и для простоты считаем коэффициенты a_i и β_i постоянными.

Положим a_1=0,1; a_2=0,05, β_1=0,2, β_2=0,3. Будем считать, что какая-то третья страна поставляет подкрепления каждой из армий, причем, ее помощь первой воюющей армии в два раза интенсивнее, чем второй. Тогда подкрепления можно представить в виде управляющей функции:

$$\gamma_1(k) = u(k), \qquad \gamma_2(k) = 0{,}5u(k), \text{где } u(k) \in \mathbb{R}.$$

В этом случае система первых разностей примет вид

$$\begin{cases} x_1(k+1) = 0{,}9x_1(k) - 0{,}3x_2(k) + u(k); \\ x_2(k+1) = -0{,}2x_1(k) + 0{,}95x_2(k) + 0{,}5u(k). \end{cases} \quad (1)$$

Предположим, что известны численности каждой из армий в начальный момент времени k =0

$$x_1(0) = 500, \quad x_2(0) = 250, \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Управление $u(k)$, k = 0, 1, …4 требуется выбрать так, чтобы к моменту времени k =5 выполнялись условия

$$x_1(5) = 3000, \quad x_2(5) = 0. \qquad (3)$$

Другими словами, может существовать, например, третья сторона, в чьих интересах способствовать победе первой из воюющих армий, поставляя подкрепления обеим (скажем, из соображений экономической выгоды).

Решение задачи отыскания оптимального управления в линейной дискретной системе. Задача в изложенной выше формулировке может быть поставлена как задача об отыскании оптимального управления в линейной дискретной системе вида

$$x(k+1) = Ax(k)+Bu(k), \quad k = 0,1,\ldots 4,$$

с матрицами $A = \begin{bmatrix} 0{,}9 & -0{,}3 \\ -0{,}2 & 0{,}95 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0{,}5 \end{bmatrix}$,
и вектором фазовых координат

$$x(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}.$$

Будем строить оптимальное программное управление с квадратичным критерием качества [6], т.е. такой искать набор $u(k)$, k = 0, 1, …4, при котором величина $J[u] = \sum_{k=0}^{4} u^2(k)$ минимальна. Критерий качества указанного вида обычно используется в случае, когда необходимо экономить ресурсы управления (в данном случае это подкрепления, направляемые в каждую из армий). При этом указанное управляющее воздействие должно переводить систему (1) из заданного начального состояния $x(0)$, (2) в заданное конечное состояние $x(5)$, (3).

Согласно [6, 7] оптимальное программное управляющее воздействие определяется формулами

$$u^0(k) = S^T(k) D^{-1} c, \quad k = 0,1,\ldots,4,$$

где $S(k) = A^{4-k}B$, $D = \sum_{k=0}^{4} S(k) S^T(k)$, $c = x(5) - A^5 x(0)$.

Произведя необходимые вычисления, получаем следующий результат: используя оптимальное программное управление,

$u(0)$ = 1897, $u(1)$ =1483, $u(2)$ =1065, $u(3)$ =613, $u(4)$ =87,

система приводится в конечное состояние к моменту k = 5:

$x^T(1)$ = (2272; 1086), $x^T(2)$ = (3201; 1319), $x^T(3)$ = (3551; 1145);
$x^T(4)$ = (3465; 684); $x^T(5)$ = (3000; 0)

(значения u и x даны с округлением до целого, т.к. подкрепления – это люди).

В случае, когда свои подкрепления обе армии формируют самостоятельно и независимо друг от друга и от каких-либо еще сторон, вектор управлений и матрица B, соответственно, будут иметь вид

$$u(k) = \begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Заметим, что в данном случае целесообразнее рассматривать задачу как задачу игрового управления с отысканием оптимальных стратегий двух игроков.

Используя аналогичную процедуру, можно отыскать необходимые значения численности подкреплений, чтобы, например, выяснить, при каких условиях возможно поражение обеих армий одновременно (или состояние, близкое к нему). Существует множество разновидностей задач оптимизации распределения сил обороны и нападения в рамках Ланчестеровских моделей.

Следует также обратить внимание на наличие тесных аналогий между Ланчестеровскими моделями военных действий и популяционными моделями в биологии. Добавление в уравнения типа Ланчестера управляющих переменных, отражающих ввод резервов, распределение сил и средств и т.д. приводит уже к оптимизационным моделям, к соответствующим задачам оптимального игрового управления.

Библиографический список

1. *Lanchester F.* Aircraft in Warfare: the Dawn of the Fourth Arm. – London: Constable and Co, 1916. – 243 p.

2. *Helmbold, R. L. 1993*. Osipov: The ‘Russian Lanchester’. European Journal of Operations Research 65: 278—288.

3. *Dupuy T. Understanding War*. History and Theory of Combat. 2nd ed. – Nova Publishers, 1998. – 312 p.

4. *Дубограй И. В.*, Чуев В. Ю. Дискретная марковская модель двустороннего боя многочисленных группировок. НАУКА и ОБРАЗОВАНИЕ, научное издание МГТУ им. Н.Э. Баумана, №10, октябрь, 2013.

5. *Самарский А.А.*, Михайлов А.П. Математическое моделирование. – М.: Наука Физматлит, 1997. – С.150-153.

6. *Альбрехт Э.Г.*, Сазанова Л.А. Синтез оптимального управления в линейных дискретных системах // Труды института математики и механики УрО РАН. – 2000. – Т. 6 №1-2. – Екатеринбург. С. 477-496.

7. *Сазанова Л.А.* Дискретный вариант модели Ланчестера // Междисциплинарные исследования в области математического моделирования и информатики. Материалы 7-й научно-практической internet-конференции. – 2016. – С. 38-39.

MODEL OF LANCHESTER AS DISCRETE CONTROL SYSTEM

L.A. Sazanov, *candidate of physico-mathematical sciences*
Ural state university of economic
(Russia, Ekaterinburg)

Abstract. *We consider the discrete analogue Lanchester model describing the behavior of the two opposing members of the military conflict. The main characteristic of the number of parties are rivals, varying depending on various factors, such as caused by the actions of competitors, and not directly related to military operations. The target is to achieve the desired number of armies at the end of a given period. The solution of the proposed task is reduced to finding the optimal control action in the corresponding linear discrete control system.*

Keywords: *linear discrete system, model of Lanchester, optimal control.*